

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»**

Скроботов А.А., Турунцева М.Ю

**Тестирование гипотезы о наличии единичного корня
для независимых панелей**

Москва 2017

Скроботов А.А. научный сотрудник лаборатории макроэкономического прогнозирования ИПЭИ Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ

Турунцева М.Ю. заведующая лабораторией макроэкономического прогнозирования ИПЭИ Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ

Данная работа подготовлена на основе материалов научно-исследовательской работы, выполненной в соответствии с Государственным заданием РАНХиГС при Президенте Российской Федерации на 2016 год.

ВВЕДЕНИЕ

Тестирование наличия единичных корней в данных имеет большое значение для эмпирического анализа. Практически ни одно макроэкономическое исследование не обходится без тестирования того, является ли конкретный временный ряд стационарным относительно тренда (trend stationary, TS) или является стационарным в первых разностях (difference stationary, DS). В первом случае, если ряд является стационарным относительно тренда, то моделировать ряд необходимо в уровнях. В противном случае нужно перейти к первым разностям временного ряда, если моделируется именно этот конкретный ряд по отдельности, или переходить к анализу коинтеграции нескольких временных рядов, каждый из которых является нестационарным. Наличие коинтеграции позволяет дать экономическое обоснование долгосрочных зависимостей и краткосрочной корректировки к долгосрочным состояниям равновесия.

Однако если рассматривать не отдельные временные ряды для конкретного субъекта (например, одной конкретной страны или одного конкретного региона), а группу (панель) временных рядов по каждому субъекту, то могут возникнуть некоторые проблемы. Существует феномен, который заключается в том, что если оценить регрессию одного нестационарного ряда на другие нестационарные ряды, то оценки OLS-коэффициентов будут часто значимы, даже когда фактически зависимости между рядами нет. Этот феномен называется ложной регрессией. Аналогичный вывод можно получить, рассматривая нестационарные временные ряды, у которых ошибки будут зависимыми. Существует необоснованное заблуждение, что для панельных данных ложная регрессия не наблюдается, особенно при малом количестве наблюдений по времени. Однако эффект ложной регрессии для панельных данных намного более существенен, чем для отдельных временных рядов. Хотя оценка в панельной регрессии для нестационарных (независимых в долгосрочном смысле) временных рядов и будет состоятельной (из-за того, что мы оцениваем модель в виде пула и усредняем все оценки по временным рядам), соответствующая ей t -статистика будет расходиться к бесконечности, что означает почти стопроцентное отвержение нулевой гипотезы на

больших выборках. Таким образом, выводы на основе этой t -статистики будут необоснованными, и необходимо проверять наличие коинтеграции между всеми временными рядами в панели, предполагая, что долгосрочная зависимость между различными показателями одинаковая.

Однако до проверки наличия коинтеграции между панелями временных рядов необходимо проверить наличие единичного корня в панелях, и проверка наличия коинтеграции осуществляется, если гипотеза о наличии панельного единичного корня не была отвергнута. Соответственно в данной работе мы акцентируем внимание на проблемах тестирования наличия панельного единичного корня в данных. Более конкретно, мы рассматриваем проблемы тестирования наличия единичных корней в панельных данных для частного (и самого простого случая) независимых панелей.

Гипотеза панельного единичного корня заключается в том, что все временные ряды в панели имеют единичный корень. Тестироваться эта гипотеза может, однако, против разных альтернатив: однородной и неоднородной. Однородная альтернатива заключается в том, что все временные ряды в панели являются стационарными. Для тестирования гипотезы о панельном единичном корне против этой альтернативы используются t -статистики на основе модели пула. С другой стороны, при неоднородной альтернативе предполагается, что существует как доля стационарных временных рядов в панели, так и доля нестационарных временных рядов в панели, и эти доли не равны нулю (то есть они должны быть значимы). Для тестирования гипотезы о панельном единичном корне против этой неоднородной альтернативы вычисляются тестовые статистики для каждого ряда в панели, а затем суммируются. При нулевой гипотезе оба этих теста, как против однородной альтернативы, так и против неоднородной альтернативы, имеют асимптотически нормальное распределение, что упрощает тестирование по сравнению с одномерными временными рядами. Оба теста также являются состоятельными, а также они являются состоятельными против другой альтернативы. Другими словами, тест против однородной альтернативы (тест по модели пула) будет также отвергать нулевую гипотезу, если какие-то временные ряды являются стационарными, а какие-то нестационарными. Кроме этого, тест, построенный против однородной альтернативы, даже если действительные данные

являются неоднородными (в смысле инерционности), является более мощным (в смысле асимптотической локальной мощности), чем тесты, построенные против правильной неоднородной альтернативы. Данные вопросы более подробно обсуждаются в Разделах 1, 2 и 4.

В Разделе 3 рассматривается проблема наличия детерминированной компоненты в данных. Самый простой вид детерминированной компоненты – это фиксированные эффекты. Можно усложнить модель на случай индивидуальных трендов, структурных сдвигов и прочего. В отличие от анализа одномерных временных рядов, при тестировании наличия единичного корня в панелях простое детрендрование на первом шаге не будет очищать от влияния детерминированной компоненты. Тестовые статистики в этом случае не будут иметь асимптотически нормальное распределение, а будут асимптотически смещенными. Для решения этой проблемы предлагается несколько подходов. Первый заключается в корректировке тестовой статистики на асимптотическое смещение. Второй метод заключается не в обычном OLS-детрендровании, который нарушает мартингальное свойство ряда, а так называемым рекурсивном детрендровании, которое позволяет получать асимптотические выводы, аналогичные случаю отсутствия детерминированной компоненты. Еще один из подходов заключается в предварительном преобразовании ряда таким образом, чтобы не было смещения итоговой тестовой статистики. Все эти проблемы относятся только к тестам, построенным для тестирования против однородных альтернатив. При тестировании против неоднородных альтернатив каждую статистику для конкретного временного ряда нужно просто скорректировать на математическое ожидание и дисперсию, а затем сложить эти скорректированные статистики. Также можно отметить, что для предотвращения смещения можно использовать обобщенный метод моментов (generalized method of moments, GMM).

В Разделе 4 обсуждается асимптотическая локальная мощность различных тестов, а также приводятся так называемые оптимальные тесты. В данном разделе также акцентируется внимание на эффект от наличия индивидуальных трендов. В то время как при тестировании наличия единичного корня в одномерном временном ряде окрестности, в которых мощность была нетривиальной, имели один и тот же порядок вне зависимости от того, был ли тренд в данных или нет, в

случае тестирования панельного единичного корня изменяется порядок окрестности, то есть при добавлении индивидуальных трендов окрестность единичного корня должна быть больше, чтобы мощность была нетривиальной, чем при учете только фиксированных эффектов.

В Разделе 5 обсуждается влияние слабой зависимости ошибок на тесты. В отличие от тестов на единичные корни во временных рядах, в панелях зависимость в ошибках не устраняется путем добавления запаздывающих разностей, и необходимо дополнительно корректировать статистику на смещение. Заметим, что это не требуется, если выполняется рекурсивное детрендрование. В Разделе 6 описываются другие тесты, по той или иной причине не вошедшие в предыдущие разделы. В Разделе 7 обсуждается влияние начальных значений на тесты, и результаты сравниваются с результатами для обычных временных рядов.

1 LLC и IPS тесты

Рассмотрим простейший случай, в котором временные ряды $\{y_{i0}, \dots, y_{iT}\}$ для кросс секционных субъектов $i = 1, 2, \dots, N$ порождаются для каждого i простой авторегрессией первого порядка

$$y_{it} = \rho_i y_{i,t-1} + \varepsilon_{it}, \quad (1)$$

где начальное значение y_{i0} является фиксированной константой, ошибки ε_{it} являются независимыми и одинаково распределенными (i.i.d.) по всем i и t с $E(\varepsilon_{it}) = 0$, $E(\varepsilon_{it}^2) = \sigma_i^2 < \infty$ и $E(\varepsilon_{it}^4) < \infty$. Эти процессы можно эквивалентно записать следующим образом, по аналогии с простой регрессией Дики-Фуллера:

$$\Delta y_{it} = \phi_i y_{i,t-1} + \varepsilon_{it}, \quad (2)$$

где $\Delta y_{it} = y_{it} - y_{i,t-1}$, $\phi_i = \rho_i - 1$. Нас интересует тестирование нулевой гипотезы

$$H_0: \phi_1 = \dots \phi_N = 0, \quad (3)$$

то есть гипотезы о том, что все временные ряды имеют единичный корень (являются независимыми случайными блужданиями), против одной из следующих альтернатив, H_{1a} и H_{1b} :

$$H_{1a}: \phi_1 = \dots = \phi_N \equiv \phi < 0, \quad (4)$$

$$H_{1b}: \phi_1 < 0, \dots, \phi_{N_0} < 0, N_0 \leq N. \quad (5)$$

При первой альтернативе, H_{1a} , авторегрессионный параметр одинаковый для всех кросс-секционных субъектов. Эта альтернатива была рассмотрена в [1] (далее LLC, см. также более раннюю версию работы, [2]) и была названа *однородной альтернативой* (homogeneous alternative). При второй альтернативе предполагается, что все N_0 кросс-секционных объектов ($0 < N_0 \leq N$) являются стационарными с индивидуальными авторегрессионными коэффициентами. Эта альтернатива была рассмотрена в [3] (далее IPS) и была названа *неоднородной альтернативой* (heterogeneous alternative). В [4] рассматривался третий вариант альтернативы, о наличии единичного корня в среднем, то есть при предположении, что пока некоторые субъекты могут быть нестационарными, вероятность, что такое случится, достаточно мала. Другими словами, предполагается, что авторегрессионный параметр является случайным с некоторым математическим

ожиданием и дисперсией, а нулевая гипотеза заключается в том, что математическое ожидание равно единице, а дисперсия равна нулю. Авторы приводят преимущества такой спецификации, однако, неясно, соответствует ли такая постановка реальным данным.

В [5] рассматривается также гипотеза о том, что $\phi_i = 0$ для некоторых i против альтернативы о том, что $\phi_i < 0$ для всех i . Для тестирования такой гипотезы в [5] предлагают брать максимум из всех индивидуальных левосторонних статистик (то есть ту статистику, которая показывает наименьшее отвержение нулевой гипотезы).

Для состоятельности тестовых статистик здесь предполагается, что доля стационарных временных рядов в панели сходится к фиксированной константе, то есть $N_0/N \rightarrow \kappa$ при $N \rightarrow \infty$. Отвержение нулевой гипотезы в пользу *неоднородной* альтернативы не обязательно говорит о том, что наличие единичного корня отвергается для всех i , а только о том, что гипотеза отвергается для доли $N_0 < N$, и тест не дает каких-либо рекомендаций о величине κ или о тех элементах панели, для которых гипотеза отвергается. С другой стороны, отвержение гипотезы единичного корня против *однородной* альтернативы не обязательно означает, что все панельные субъекты являются стационарными, поскольку тест, построенный чтобы иметь мощность против однородной альтернативы также будет иметь мощность при неоднородной альтернативе.

В [6] проводятся симуляции Монте-Карло в зависимости от доли стационарных временных рядов в панели. Авторы получили достаточно логичный результат, что мощность всех тестов увеличивается при увеличении пропорции стационарных временных рядов в панели. Также мощность увеличивается сильнее при росте T , чем при росте N . Следствием этого является то, что при больших T и достаточно малых пропорциях стационарных временных рядов в панели мы будем часто отвергать нулевую гипотезу о наличии единичного корня, в то время как при малых T даже при достаточно высокой пропорции стационарных временных рядов в панели из-за низкой мощности мы будем редко не отвергать нулевую гипотезу, после этого некорректно моделируя все временные ряды как нестационарные. Поэтому авторы рекомендуют не накладывать однородные ограничения на все временные ряды в панели, а анализировать эти временные ряды индивидуально.

Отметим, что существует также подход [7], в котором рассматривается трехмерная панель (например, время, страна и марка автомобиля или прогноз инфляции для различных индивидов с различными временными горизонтами; другими словами, вместе с числом временных периодов T также имеются индексы N и M , где N может обозначать страны или отрасли, а M может обозначать регионы или фирмы внутри страны или отрасли).

1.1 LLC-тест

Тест LLC основан на t -статистике для ϕ в регрессии пула

$$\Delta y_{it} = \phi y_{i,t-1} + \varepsilon_{it}$$

или, используя матричные обозначения,

$$\Delta \mathbf{y}_i = \phi \mathbf{y}_{i,-1} + \varepsilon_i,$$

где $\Delta \mathbf{y}_i = [\Delta y_{i1}, \dots, \Delta y_{iT}]'$, $\mathbf{y}_{i,-1} = [y_{i0}, y_{i1}, \dots, y_{i,T-1}]'$ и $\varepsilon_i = [\varepsilon_{i1}, \dots, \varepsilon_{iT}]'$.

На первом шаге оценивается σ_i^2 для каждого панельного временного ряда:

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{\Delta \mathbf{y}_i' \mathbf{M}_i \Delta \mathbf{y}_i}{T-2},$$

где $\mathbf{M}_i = \mathbf{I}_T - \mathbf{X}_i (\mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i'$ и $\mathbf{X}_i = (\mathbf{y}_{i,-1})$. Тогда t -статистика для проверки гипотезы (3) принимает вид:

$$\tau_\phi = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta \mathbf{y}_i' \mathbf{y}_{i,-1} / \hat{\sigma}_i^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \mathbf{y}_{i,-1}' \mathbf{y}_{i,-1} / \hat{\sigma}_i^2}}. \quad (6)$$

Как отмечается в [8], в LLC предлагается дополнительно делить эту статистику на $\hat{\sigma}_{NT}$, общее (по всем N и T) стандартное отклонение остатков, но эти остатки уже скорректированы на свои стандартные отклонения, поэтому это стандартное отклонение можно опустить.

1.2 IPS-тест

В отличие от LLC, рассматривая неоднородную альтернативу H_{1b} , состоящую из множества неравенств, IPS предлагают тест, основанный на среднем индивидуальных t -статистик,

$$\bar{\tau} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tau_i, \quad (7)$$

где

$$\tau_i = \frac{\Delta \mathbf{y}_i' \mathbf{y}_{i,-1}}{\hat{\sigma}_i \sqrt{\mathbf{y}_{i,-1}' \mathbf{y}_{i,-1}}} \quad (8)$$

является t -статистикой Дики-Фуллера для i -ого кросс-секционного субъекта.

В [5] предлагается вместо усреднения тестовых статистик брать минимум из всех статистик, что позволяет получить более высокую мощность при очень малом количестве стационарных временных рядов в панели.

2 Асимптотика тестов на единичный корень в панельных данных

Рассмотрим получение предельного распределения для статистики LLC. Используя FCLT и CMT, можно показать, что при $T \rightarrow \infty$

$$\tau_\phi = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta y'_{i-1} y_{i-1} / \hat{\sigma}_i^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^N y'_{i-1} y_{i-1} / \hat{\sigma}_i^2}} \Rightarrow_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^N \int_0^1 W_i(r) dW_i(r)}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \int_0^1 W_i(r)^2 dr}} \equiv \zeta, \quad (9)$$

где $W_i(r)$, $i = 1, \dots, N$ – независимые Винеровские процессы. Применяя закон больших чисел, числитель (9) (деленный на N) сходится по вероятности к нулю, а знаменатель (деленный на N) сходится к $\frac{1}{2}$. Поэтому t -статистика на основе регрессии пула (по центральной предельной теореме) имеет стандартное нормальное распределение.

Рассмотрим получение предельного распределения для статистики IPS. Понятно, что при $T \rightarrow \infty$ каждая статистика τ_i в (8) сходится к обычному распределению Дики-Фуллера,

$$\tau_i \Rightarrow \eta_i \equiv \frac{\int_0^1 W_i(r) dW_i(r)}{\int_0^1 W_i^2(r) dr}.$$

Поскольку статистика

$$\bar{\tau} \Rightarrow \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \eta_i$$

при фиксированном N и $T \rightarrow \infty$, то при $N \rightarrow \infty$ статистика $\sqrt{N} \bar{\tau}$ имеет стандартное нормальное предельное распределение, аналогично LLC.

Несколько слов о последовательной асимптотике. Результаты выше были основаны на том, что сначала применяется асимптотика при $T \rightarrow \infty$, а затем при $N \rightarrow \infty$. Можно рассмотреть альтернативный подход, когда одновременно $T, N \rightarrow \infty$ (IPS доказывают, что асимптотические результаты остаются неизменными по сравнению с последовательной асимптотикой) или когда N является функцией от

T , следуя [9].¹ В [9] вводятся понятия последовательной и совместной сходимости по вероятности и слабой сходимости и устанавливают соотношения между этими типами сходимости. Авторы заключают, что последовательная асимптотика не предполагает совместную, так что в некоторых ситуациях совместная асимптотика может не выполняться. Хотя подходы, связанные с совместной асимптотикой, являются интересными с теоретической точки зрения и иногда дают полезные следствия, предельные результаты по существу такие же, как и в последовательной асимптотике, но требуют более строгих условий. С практической точки зрения последовательная асимптотика является достаточной для большинства случаев.

3 Наличие детерминированной компоненты

Более подробно остановимся на вопросе наличия детерминированных компонент в данных, а именно на спецификации детерминированной компоненты. Обычно нас интересуют два наиболее распространенных случая,

$$\Delta y_{it} = \mu_i + \phi_i y_{i,t-1} + \varepsilon_{it}, \quad \zeta \text{ББ} \quad (10)$$

$$\Delta y_{it} = \mu_i + \beta_i t + \phi_i y_{i,t-1} + \varepsilon_{it}, \quad \zeta \text{ББ} \quad (11)$$

где уравнение (10) соответствует случаю индивидуально-специфических констант (фиксированных эффектов), а (11) соответствует случаю индивидуально-специфических трендов (“случайных трендов”, incidental trends в терминологии [10]).

Отметим, что многие тесты требуют условия, что $N/T \rightarrow \infty$ для контроля размера, так как в противном случае ошибка, вызванная детрендированием, будет возрастать с ростом N ; см. [11], Fact 3.

¹ Последний подход может принимать вид, например, $T(N) = cN$ для $c \neq 0$. Этот подход в [9] называется асимптотикой диагональной траектории (diagonal path). Недостатком этого подхода является то, что он сильно специфичен и не дает соответствующей аппроксимации для заданных T и N , а также зависит от конкретной функциональной формы зависимости $T = T(N)$.

3.1 Тест LLC

Для простоты рассмотрим Случай 1 с фиксированными эффектами. Тест LLC основан на t -статистике для ϕ в регрессии с фиксированными эффектами

$$\Delta y_{it} = \alpha_i + \phi y_{i,t-1} + \varepsilon_{it}$$

или, используя матричные обозначения,

$$\Delta \mathbf{y}_i = \mathbf{1}\alpha_i + \phi \mathbf{y}_{i,-1} + \varepsilon_i,$$

где $\Delta \mathbf{y}_i = [\Delta y_{i1}, \dots, \Delta y_{iT}]'$, $\mathbf{y}_{i,-1} = [y_{i0}, y_{i1}, \dots, y_{i,T-1}]'$, $\varepsilon_i = [\varepsilon_{i1}, \dots, \varepsilon_{iT}]'$ и $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]'$.

На первом шаге оценивается σ_i^2 для каждого временного ряда:

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{\Delta \mathbf{y}_i' \mathbf{M}_i \Delta \mathbf{y}_i}{T-2},$$

где $\mathbf{M}_i = \mathbf{I}_T - \mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i'$ и $\mathbf{X}_i = (\mathbf{1}, \mathbf{y}_{i,-1})$. Тогда t -статистика для проверки гипотезы (3) принимает вид:

$$\tau_\phi = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta \mathbf{y}_i' \mathbf{M}_1 \mathbf{y}_{i,-1} / \hat{\sigma}_i^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \mathbf{y}_{i,-1}' \mathbf{M}_1 \mathbf{y}_{i,-1} / \hat{\sigma}_i^2}}, \quad (12)$$

где $\mathbf{M}_1 = \mathbf{I}_T - \mathbf{1}(\mathbf{1}' \mathbf{1})^{-1} \mathbf{1}'$.

Оценивание коэффициента ϕ эквивалентно оцениванию коэффициента ϕ в центрированной регрессии

$$\Delta \tilde{y}_{it} = \phi \tilde{y}_{i,t-1} + e_{it},$$

где $\tilde{y}_{it} = y_{it} - T^{-1} \sum_{j=0}^T y_{i,j}$. При нулевой гипотезе мы получим

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T e_{it} \tilde{y}_{i,t-1} = -\sigma_i^2 / 2,$$

и

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \tilde{y}_{i,t-1} \tilde{y}_{i,t-1}' = \sigma_i^2 / 6,$$

так что $\sqrt{NT}(\hat{\phi} - 1) + 3\sqrt{N} \Rightarrow N(0, 51/5)$, то есть $T(\hat{\phi} - 1) \xrightarrow{p} -3$. Следовательно, оценка $\hat{\phi}$ является асимптотически смещенной, и t -статистика для проверки $\phi = 0$ расходится к $-\infty$ при росте T и N (из-за коррелированности регрессора и ошибки). Это смещение называется смещением Никелла (Nickell bias), см. [12].

Этот результат можно получить иначе следующим образом. Заметим, что при $T \rightarrow \infty$

$$\tau_\phi = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta \mathbf{y}_i' \mathbf{M}_1 \mathbf{y}_{i,-1} / \hat{\sigma}_i^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \mathbf{y}_{i,-1}' \mathbf{M}_1 \mathbf{y}_{i,-1} / \hat{\sigma}_i^2}} \Rightarrow_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^N \int_0^1 W_i^\mu(r) dW_i(r)}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \int_0^1 W_i^\mu(r)^2 dr}} \equiv \zeta, \quad (13)$$

где $W_i^\mu(r) = W_i(r) - \int_0^1 W_i(s)ds$ – центрированный Винеровский процесс, $W_i(r)$, $i = 1, \dots, N$ – независимые Винеровские процессы. Применяя закон больших чисел, числитель (13) (деленный на N) сходится по вероятности к $-\frac{1}{2}$, а знаменатель (деленный на $\sqrt{N}$) сходится к $\frac{1}{\sqrt{6}}$. Поэтому t -статистика на основе регрессии пула расходится.

Имея значения для математических ожиданий и дисперсий функционалов от Винеровских процессов, представленные в таблице ниже (см. [2]),

	$E(\int W_i^j dW_i)$	$Var(\int W_i^j dW_i)$	$E(\int (W_i^j)^2)$	$Var(\int (W_i^j)^2)$
$\mu_i (j = \mu)$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{45}$
$(\mu_i, t) (j = \tau)$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{6300}$

можно получить, что в Случае 1

$$\tau_\phi \Rightarrow N(-\sqrt{1.875N}, 1.25),$$

а в Случае 2

$$\sqrt{\frac{448}{277}} \tau_\phi \Rightarrow N(-\sqrt{3.75N}, 1).$$

Данные выводы можно получить, применяя CLT и LLN согласно

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \left(\int_0^1 W_i^j(r) dW_i(r) - E \left(\int_0^1 W_i^j(r) dW_i(r) \right) \right) \Rightarrow_{N \rightarrow \infty} N \left(0, Var \left(\int_0^1 W_i^j(r) dW_i(r) \right) \right)$$

и

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_0^1 W_i^j(r)^2 dr \xrightarrow{p}_{N \rightarrow \infty} E \left(\int_0^1 W_i^j(r)^2 dr \right)$$

и используя Таблицу (1). В общем случае тестовой статистикой для проверки гипотезы H_0 в (3), которая имеет стандартное нормальное распределение, является скорректированная на смещение статистика

$$Z_{LLC} = \frac{\sum_{i=1}^N (\Delta y'_i \mathbf{M}_1 y_{i,-1} / \hat{\sigma}_i^2 - \mu_T^* T)}{\sigma_T^* \sqrt{\sum_{i=1}^N y'_{i,-1} \mathbf{M}_1 y_{i,-1} / \hat{\sigma}_i^2}} = \frac{\tau_\phi}{\sigma_T^*} - \frac{\mu_T^* TN}{\sigma_T^* \sqrt{\sum_{i=1}^N y'_{i,-1} \mathbf{M}_1 y_{i,-1} / \hat{\sigma}_i^2}}, \quad (14)$$

где μ_T^* является выборочным аналогом $\mu_\infty^* = E(\int W_i^j dW_i^j)$, а σ_T^{2*} является выборочным аналогом $\sigma_\infty^{2*} = Var(\int W_i^j dW_i^j) / E(\int (W_i^j)^2)$. Значения μ_T^* и σ_T^{2*} приведены в LLC, Table 2, для различных T .

Для конкретного случая с фиксированными эффектами, применяя центральную предельную теорему к центрированному числителю в (13) при $N \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \left(\int_0^1 W_i^\mu(r) dW_i(r) - E \left(\int_0^1 W_i^\mu(r) dW_i(r) \right) \right) \Rightarrow_{N \rightarrow \infty} N(0, \frac{1}{12}).$$

Тогда

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \left(\int_0^1 W_i^\mu(r) dW_i(r) - E \left(\int_0^1 W_i^\mu(r) dW_i(r) \right) \right)}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_0^1 W_i^\mu(r)^2 dr}} \Rightarrow_{N \rightarrow \infty} N(0, \frac{1}{2}).$$

Таким образом, статистика

$$Z_{LLC} = \frac{\sum_{i=1}^N (\Delta y'_{i-1} \mathbf{M}_1 \mathbf{y}_{i-1} / \hat{\sigma}_i^2 + \frac{1}{2} T)}{\sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{y}'_{i-1} \mathbf{M}_1 \mathbf{y}_{i-1} / \hat{\sigma}_i^2}} = \frac{\tau_\phi}{\sqrt{\frac{1}{2}}} - \frac{-\frac{1}{2} TN}{\sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{y}'_{i-1} \mathbf{M}_1 \mathbf{y}_{i-1} / \hat{\sigma}_i^2}} \quad (15)$$

будет иметь стандартное нормальное предельное распределение. Отметим, что при $\mu_i = 0$ статистика Z_{LLC} совпадает с τ_ϕ . Также следует заметить, что скорость сходимости для оценки $\hat{\phi}$ будет равна $T\sqrt{N}$ (то есть $T\sqrt{N}(\hat{\phi} - 1) = O_p(1)$), то есть сходимость происходит быстрее при $T \rightarrow \infty$ (суперсостоятельность), чем при $N \rightarrow \infty$. Также из скорости сходимости следует более высокая мощность панельных тестов, поскольку она увеличивается не только с ростом T , но и с ростом N .

3.2 Коррекция числителя оценки коэффициента

Вспомним, что $T(\hat{\phi} - 1) \xrightarrow{p} -3$, и статистика (15) основана на коррекции оценки $\hat{\phi}$, $\hat{\phi}^+ \equiv \hat{\phi} + 3/T$. Можно, однако, скорректировать не саму оценку коэффициента $\hat{\phi}$, а только ее числитель:

$$\hat{\phi}^\# = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta y'_{i-1} \mathbf{M}_1 \mathbf{y}_{i-1} / \hat{\sigma}_i^2 + \frac{NT}{2} \hat{\sigma}_i^2}{\sum_{i=1}^N \mathbf{y}'_{i-1} \mathbf{M}_1 \mathbf{y}_{i-1} / \hat{\sigma}_i^2} \quad (16)$$

(см. [13] и [14]). Тогда (в случае фиксированных эффектов) $\sqrt{NT}(\hat{\phi}^\# - 1) \Rightarrow N(0, 3)$, и соответствующая t -статистика будет иметь стандартное нормальное распределение. Но в случае коррекции оценки коэффициента, как в LLC, $\sqrt{NT}(\hat{\phi}^+ - 1) \Rightarrow N(0, 51/5)$, так что последняя оценка для ϕ будет менее эффективна в смысле дисперсии, но обе t -статистики будут асимптотически эквивалентны.

3.3 Детрендинг, устраняющее смещение

Альтернативный способ исключить смещение при оценивании был рассмотрен в [15]. Авторы в качестве оценки константы использовали начальное значение y_{i0} , так что регрессионная модель для Случая 1 (против однородной альтернативы H_{1a}) принимает вид

$$\Delta y_{it} = \phi(y_{i,t-1} - y_{i0}) + \varepsilon_{it}. \quad (17)$$

При нулевой гипотезе величина $E[(y_{i,t-1} - y_{i0})\varepsilon_{it}] = 0$, так что t -статистика для ϕ в регрессии (17) не будет смещенной и будет иметь асимптотическое стандартное нормальное распределение. Полученный тест, являющийся t -статистикой в регрессии для преобразованных рядов, мы называем UB_{NT} .

В случае наличия линейного тренда, чтобы получить несмещенную тестовую статистику, имеющую стандартное нормальное распределение, в [8] было предложено рассмотреть следующую регрессию:

$$\Delta y_{it}^* = \phi y_{i,t-1}^* + \varepsilon_{it}^*, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta y_{it}^* &= s_t \left[\Delta y_{it} - \frac{1}{T-t} (\Delta y_{it} + \dots + \Delta y_{iT}) \right], \\ s_t^2 &= (T-t)/(T-t+1), \\ y_{i,t-1}^* &= y_{i,t-1} - y_{i0} - \frac{t-1}{T} (y_{iT} - y_{i0}). \end{aligned}$$

Это преобразование называется преобразованием Гельмерта (Helmert transformation). В данном преобразовании вычитание y_{i0} удаляет константу, а $(y_{iT} - y_{i0})/T = (\Delta y_{i0} + \dots + \Delta y_{iT})/T$ является оценкой коэффициента при тренде. Смещения не возникает из-за ортогональности преобразованных регрессора и ошибки.

3.4 Тест IPS

Для тестов IPS коррекция связана только с конкретными детерминированными компонентами для каждого i , то есть каждая статистика τ_i в (8) корректируется на некоторые средние и дисперсию, заданные в IPS, Table 3 (средние и дисперсии распределений Дики-Фуллера).

3.5 Коррекция на основе GMM

Другая возможность устранения смещения из-за детрендрования - использование альтернативных методов оценивания, таких как обобщенный метод моментов (Generalized Methods of Moments, GMM). В [16] применяются вторые разности для получения теста на единичный корень без корректировки смещения, используя соответствующую GMM-оценку.

4 Асимптотическая локальная мощность

В [8] были рассмотрены локальные (однородные) альтернативы, если процесс y_{it} порождается как

$$y_{it} = \left(1 - \frac{c}{T\sqrt{N}}\right) y_{i,t-1} + \varepsilon_{it}, \quad (19)$$

где $c > 0$. Используя последовательную предельную теорию, автор показал, что при локальной альтернативе данного вида процесс y_{it} ведет себя также, как и при нулевой гипотезе, то есть $T^{-1/2}y_{i,\lceil rT \rceil} \Rightarrow \omega_i W_i(r)$ при $0 \leq c < \infty$, где ω_i^2 – долгосрочная дисперсия ε_{it} . Этот результат отличается от случая с обычным временным рядом, когда предельный процесс является процессом Орнштейна-Уленбека. Также при локальной альтернативе (и при отсутствии детерминированной компоненты) t -статистика для проверки $\phi = 0$ имеет асимптотическое распределение $N(-c/\sqrt{2}, 1)$.

В [8] отмечается, что если рассматривать обычную скорректированную статистику LLC, то локальная мощность будет состоять из двух различных компонент. Первая представляет асимптотический эффект смещения вследствие метода детрендрования, а вторая – обычный параметр масштаба предельного распределения при последовательности локальных альтернатив. Если долгосрочная дисперсия оценивается состоятельно, обе компоненты взаимоуничтожаются, и тестовая статистика будет центрирована около нуля, так что она не будет иметь мощности. При фиксированной стационарной альтернативе оценка долгосрочной дисперсии, вычисленная на основе первых разностей, будет сходиться к нулю, так что тест будет состоятельным (что не так в одномерном случае, где долгосрочная дисперсия должна оцениваться для ряда в уровнях).

В [17] был предложен более общий подход, в котором

$$y_{it} = \left(1 - \frac{c_i}{N^{n_T}}\right) y_{i,t-1} + \varepsilon_{it}, \quad (20)$$

где c_i являются *i. i. d.* случайными величинами с математическим ожиданием μ_c и дисперсией σ_c^2 на неотрицательном ограниченном интервале $[0, M_c]$.

Сначала рассмотрим Случай 1 (фиксированные эффекты, отсутствие тренда). В этом случае

$$Z_{LLC} \Rightarrow N\left(-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{51}}\mu_c, 1\right), \quad (21)$$

так что функция асимптотической локальной мощности будет $\Phi\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{51}}\mu_{c,1} - z_\xi\right)$, где $\Phi(\cdot)$ – функция стандартного нормального распределения, z_ξ – критическое значение на уровне значимости ξ . Поэтому функция мощности зависит только от среднего c_i , но не от неоднородности локальных альтернатив около своего среднего.

В [18] показывается, что t -статистика, основанная на оценке $\hat{\phi}^\#$ в (16), в этом случае будет сходиться к нормальному распределению с математическим ожиданием $\mu_{c,2}/4\sqrt{3}$ и единичной дисперсией. Однако такая статистика будет иметь нетривиальную мощность только в окрестности $1/N^{1/4}T$ единицы, в отличие от статистики LLC, хотя оба коэффициента ($\hat{\phi}^+$ и $\hat{\phi}^\#$) будут асимптотически эквивалентными, а соответствующие t -статистики будут иметь стандартное нормальное распределение. Статистика, основанная на $\hat{\phi}^\#$, будет более эффективной в том смысле, что оценка коэффициента ϕ будет иметь меньшую дисперсию. Но статистика Z_{LLC} будет иметь большую локальную мощность. Это происходит из-за того, что (скорректированная) оценка для ϕ в LLC, $\hat{\phi}^+$, является суммой (скорректированной) оценки $\hat{\phi}^\#$ и дополнительной случайной компоненты. Это приводит к эффективности при нулевой гипотезе оценки $\hat{\phi}^\#$. Но в окрестности $1/N^{1/2}T$ t -статистика, основанная на $\hat{\phi}^\#$, имеет то же самое распределение, что и при нулевой гипотезе (так что тест будет иметь тривиальную мощность), а дополнительная компонента сдвигается в среднем от этого распределения, так что мощность статистики LLC зависит от этой дополнительной компоненты, и $\hat{\phi}^\#$ не оказывает влияния асимптотически. Появляющаяся дополнительная компонента является панельной версией теста Саргана-Бхаргавы [19]:

$$V_0 = \frac{\sqrt{N}}{\hat{\sigma}} \left(\frac{1}{NT^2} \mathbf{y}'_{i,-1} \mathbf{M}_1 \mathbf{y}_{i,-1} - \frac{1}{6} \hat{\sigma}^2 \right). \quad (22)$$

Тест, отвергающий нулевую гипотезу при малых значениях статистики V_0 , имеет ту же самую асимптотическую локальную мощность, что и тест LLC.

4.1 Наличие индивидуальных трендов

В случае индивидуально-специфических трендов скорость сходимости локальной окрестности единицы должна быть ниже, чем $1/\sqrt{NT}$. Для получения нетривиальной локальной мощности она должна быть $1/N^{1/4}T$. Отличие связано с тем, что сложно обнаружить наличие единичных корней в панелях при наличии неоднородных трендов, называемых “случайными трендами” в терминологии [10]). Также в [17] допускаются двухсторонние альтернативы, предполагая, что c_i имеют ненулевые средние и дисперсию. Функция локальной мощности точечно-оптимального теста зависит от четвертого момента параметра c_i , так что в панелях с более рассеянными авторегрессионными коэффициентами, как правило, нулевая гипотеза будет легче отвергаться.

В [17] сравнивается ряд тестов на основе их локальной мощности. Тест [8], основанный на коррекции временных рядов, $UB_{NT} \Rightarrow N(\mu_{c,2}/6\sqrt{6}, 1)$ ($\mu_{c,i}$ обозначает i -ый момент случайной величины c), так что его асимптотическая мощность равна $\Phi(\mu_{c,2}/6\sqrt{6} - z_\xi)$. Для теста LLC, $Z_{LLC} \Rightarrow N(-\frac{15\sqrt{15}}{2} \frac{112}{193} \mu_{c,2}/420, 1)$, то есть тесты LLC и [20] имеют более низкую асимптотическую локальную мощность, чем тест Брайтунга, что также подтверждается симуляциями в [8]. Еще данные результаты говорят о том, что мощность будет зависеть от второго момента локализирующего параметра, то есть при более неоднородной альтернативе мощность будет выше. Отметим, что в [8] ошибочно утверждается неправильная окрестность единицы, $1/\sqrt{NT}$, в которой, как показано в [21], тест Брайтунга имеет тривиальную мощность.

На малых выборках, однако, асимптотическая локальная мощность все еще может плохо предсказывать действительную мощность. В [22] предлагается подход, который дает более аккуратную аппроксимацию фактической мощности на конечных выборках (при малых N), если авторегрессионный параметр задавать как

$$\rho_i = 1 + \frac{c_i}{N^{\kappa} T^{\tau}}$$

Авторы показывают, как моменты некоторых общеизвестных выборочных элементов, лежащих в основе тестовых статистик, записываются в виде разложения бесконечного порядка (до порядка T^{-1}) в моментах c_i с коэффициентами, зависящими от скорости сокращения локальной альтернативы. Кроме этого, авторы задают относительную скорость роста N и T , $\theta = \ln(T)/\ln(N) > 0$, так что $T = N^\theta$. Другими словами, в отличие от предыдущих подходов, где задаются фиксированные значения $\tau = 1$ и $\kappa = 1/2$ или $\kappa = 1/4$, авторы получают, что любая тройка (θ, τ, κ) , удовлетворяющая условию $\theta(1 - \tau) + 1/2 - \kappa = 0$ (или $\theta(1 - \tau) + 1/4 - \kappa = 0$ для случая с трендами), будет давать ту же самую асимптотическую локальную мощность.

Важно отметить, что мощность не будет теперь зависеть только от первого момента c_i , но будет зависеть от моментов более высокого порядка ($\mu_c^j = E(c_i^j)$). Например, если использовать левосторонний тест, и $\mu_c^2 > 0$, но $\mu_c^1 > 0$ или $\mu_c^1 = 0$, то можно некорректно заключить, что панель имеет единичный корень. То есть тест не может отличить с одной стороны наличие единичного корня и с другой стороны взрывного поведения ($\mu_c^1 > 0$) и/или случая, когда c_i в среднем равны нулю ($\mu_c^1 = 0$), но имеют ненулевую дисперсию ($\mu_c^2 > 0$). Или, например, может возникнуть проблема, когда $\mu_c^1 < 0$, но более высокие моменты достаточно велики, чтобы устранить эффект отрицательного среднего, приводя к положительному сносу. Таким образом, в отличие от существующей практики использовать левосторонние тесты, авторы рекомендуют использовать двухсторонние.

4.2 Оптимальные тесты

Можно построить асимптотическую огибающую мощности, используя лемму Неймана-Пирсона, аналогично [23]. (Почти) оптимальный тест (точечно-оптимальный тест), предложенный в [17], в случае отсутствия детерминированной компоненты будет иметь вид

$$V_{NT} = \frac{1}{\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\Delta_{\bar{c}_i} y_{it})^2 - (\Delta y_{it})^2 \right) - \frac{1}{2} \mu_{c,2}, \quad (23)$$

где $\Delta_{\bar{c}_i} y_{it} = y_{it} - (1 - \bar{c}_i/T\sqrt{N})y_{i,t-1}$ для $t = 1, \dots, T$, $\bar{c}_i$, $i = 1, \dots, N$ выбраны случайным образом вместо неизвестных значений c_i , $\mu_{c,k} = E(\bar{c}_i^k)$, а дисперсия σ^2 оценивается при нулевой гипотезе. При локальной альтернативе статистика V_{NT}

сходится к $N(-E(c_i \bar{c}_i), 2\mu_{c,2})$. Огибающую мощности можно получить, полагая $\bar{c}_i = c_i$.

Сравнивая мощность оптимального теста с тестом LLC, авторы заключают, что LLC является оптимальным только в случае однородной альтернативы, $c_i = c$, так что $E(c_i) = \sqrt{E(c_i^2)}$. Если же случайным образом генерировать значения $\bar{c}_i$ для построения тестовой статистики, ее мощность будет ниже, чем если взять одинаковые значения $\bar{c}_i = \bar{c}$, но тогда тест будет идентичным тесту LLC. Кроме того, тест будет зависеть от значения $\bar{c}$, в отличие от теста [23] для одного временного ряда из-за того, что в случае панели локальная альтернатива ближе к нулевой гипотезе (из-за деления на N^n), чем в случае единственного временного ряда.

В [17] также были разработаны оптимальные тесты для случаев наличия фиксированных эффектов и индивидуально-специфических трендов.

Аналогично с тестом IPS, в котором также при локальной альтернативе вероятностный предел скорректированной статистики зависит от двух компонент. Тест IPS имеет асимптотически нормальное распределение с некоторым математическим ожиданием (зависящим от c) и единичной дисперсией.

В [24] было предложено обобщение теста [17] на случай серийно коррелированных ошибок. В [25] на основе теории предельных экспериментов авторы получают огибающую асимптотической локальной мощности для неоднородной панели с фиксированными эффектами. Авторы предлагают асимптотически оптимальный тест, являющийся ничем иным, как шкалированным числителем статистики P_b , предложенной в [26]:

$$\hat{\Delta} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{NT}\hat{\sigma}^2} \sum_{i=1}^N \sum_{t=3}^T (y_{i,t-1} - y_{i1}) \Delta y_{it}.$$

Этот тест является равномерно наиболее мощным (UMP) тестом, как и тест отношения правдоподобий [17] и тест [15]. Как отмечено в [27], $\hat{\Delta} = P_b + o_p(1)$. Отметим, что в [17] и [25] рассматривалась локальная альтернатива вида

$$\rho_i = 1 + \frac{h}{\sqrt{NT}} H_i,$$

где H_i является случайной со средним 1, а детерминированная величина h описывает отклонение от единичного корня. В [28] рассматривается другая постановка, в которой H_i является случайной со средним 0 и дисперсией 1, однако,

теперь окрестность должна быть порядка $1/N^{1/4}T$, а не $1/N^{1/2}T$. Поскольку математическое ожидание H_i неизвестно на практике, авторы рекомендуют использовать отвержение каждого из двух предложенных оптимальных тестов на основе двухсторонней гипотезы.

4.3 Детрендинг

В [29] вместо обычного детрендинга рассматривались свойства рекурсивного детрендинга, допуская возможно нелинейную трендовую функцию (например, полиномиальный тренд). Кроме полиномиального тренда допускается также более сложная структура, такая как, например, гладкий сдвиг в уровнях на основе логистической функции или множественные сдвиги в трендах (см. [30]). Более ранние работы, такие как [31] и [32], а также многие другие, акцентирующие внимание на различных подходах, изучали эффект рекурсивного детрендинга только на основе симуляций, в то время как в [29] более аккуратно анализируются асимптотические свойства рекурсивного детрендинга. Причина преимущества рекурсивного детрендинга, например, для обычных временных рядов, заключается в том, что обычное (по всей выборке) детрендинг нарушает мартингальное свойство данных, а рекурсивное его сохраняет, что приводит к менее смещенной оценке наибольшего авторегрессионного корня. Рекурсивное детрендинг можно проводить как для рядов в уровнях, так и в разностях (последнее приводит к большей мощности). Более конкретно, статистику $t - REC$ можно записать следующим образом:

$$t - REC = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{t=p+1}^T R_{i,t-1} r_{it} / \hat{\sigma}_{e,i}^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{t=p+1}^T R_{i,t-1}^2 / \hat{\sigma}_{e,i}^2}}, \quad (24)$$

где

$$\hat{\sigma}_{e,i}^2 = \frac{\mathbf{r}_i' \mathbf{r}_i}{T},$$

$$r_{it} = y_{it} - \sum_{k=2}^t y_{ik} a_{kt},$$

а

$$a_{kt} = d_k' (\sum_{n=1}^t d_n d_n')^{-1} d_t$$

$$d_t = G \Delta D_t,$$

где G является $p \times (p + 1)$ – selection matrix, состоящая из нулей и единиц, чтобы не учитывать дифференцированную константу, которая становится вектором из нулевых элементов. Здесь $p + 1$ является размерностью детерминированной компоненты. Переменная $R_{i,t-1}$ определяется как $R_{i,t-1} = \sum_{n=p+1}^t r_{in}$.

Статистика в модели пула на основе рекурсивно детрендрированных рядов будет иметь асимптотическое нормальное распределение без дополнительной коррекции числителя на факторы, связанные со средним и дисперсией, как делается в других тестах. Однако, сравнивая локальную мощность с тестами [8] и тестом t^+ в [18] в случае наличия трендов, Вестерлунд заключает, что асимптотическая локальная мощность теста, основанного на рекурсивном детрендрировании, несколько ниже (хотя на конечных выборках выше, чем t^+). Более точно, $t^+ \Rightarrow -0.053\mu_{c,2} + N(0,1)$, $UB_{NT} \Rightarrow 0.068\mu_{c,2} + N(0,1)$ (используются правосторонние критические значения) и $t - REC \Rightarrow -0.052\mu_{c,2} + N(0,1)$ и оптимальный тест $V_{NT} \Rightarrow -0.075\mu_1 + N(0,1)$, так что $0.075 > 0.068 > 0.053 > 0.052$. Напомним, что в случае отсутствия тренда $t^+ \Rightarrow -0.47\mu_{c,1} + N(0,1)$, $t - REC \Rightarrow -0.5\mu_{c,1} + N(0,1)$, а оптимальный тест $V_{NT} \Rightarrow -0.5\mu_{c,1} + N(0,1)$.

Автор задается вопросом, изменяется ли окрестность, в которой тест имеет нетривиальную мощность, при добавлении тренда более высокого порядка (например, квадратичный). Как уже было отмечено ранее, при наличии индивидуальных трендов тест имеет мощность только в окрестности $N^{-1/4}T^{-1}$ единицы, в отличие от случая с только фиксированными эффектами, где такой окрестностью будет $N^{-1/2}T^{-1}$. Оказывается, что тренд более высокого порядка не меняет данную окрестность, и она остается такой же, как и в случае линейного тренда, то есть $N^{-1/2}T^{-1}$. Однако, мощность все равно уменьшается (локальная мощность зависит от степени тренда), то есть “предельные издержки” линейного тренда намного выше, чем трендов более высокого порядка.

В [27] анализируется GLS-детрендрование², однако только для случая фиксированных эффектов. Вестерлунд рассматривает два варианта GLS-детрендрования: в первом случае детрендрование производится после взятия

² Единственная предшествующая работа, которая исследовала эффект от GLS-детрендрования на основе симуляций, была работа [33].

первых разностей, а во втором случае наоборот. В случае отдельного временного ряда порядок не играет роли. Автор заключает, что первый способ приводит к не только смещенной оценке, но и расходящейся, а при коррекции на среднее и дисперсию мощность сильно падает (рассматривались статистики [18], $t^\#$ и t^+). В терминах локальной мощности рассматриваемые статистики также хуже $t^\#$ и t^+ и даже не лучше, чем обычные GLS-статистики для каждого временного ряда. С другой стороны, если брать разность после детрендривания, то тест будет несмещенным и более мощным, чем $t^\#$ и t^+ при OLS-детрендривании. В качестве объяснения данного феномена см. Remark 6 в [27].

Обозначим соответствующий GLS-оператор как $\bar{D}$, и этот оператор применяется к y_{it} как $\bar{D}y_{it} = X_{it} - wy_{i1} - w(1 - \bar{\rho}) \sum_{k=2}^T \Delta_{\bar{\rho}} y_{ik}$, где $\Delta_{\bar{\rho}} y_{it} = y_{it} - \bar{\rho} y_{i,t-1}$ для $t \geq 2$, а параметр

$$\bar{\rho} = 1 + \frac{\bar{c}}{N\bar{\kappa}T}$$

теперь зависит не только от $\bar{c} \neq 0$, но и от $\bar{\kappa} \geq 0^3$. Пусть (Q)GLS-оценка максимального авторегрессионного корня равна

$$\hat{\phi}_{QGLS} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{t=2}^T \bar{D}y_{i,t-1} \Delta(\bar{D}y_{it})}{\sum_{i=1}^N \sum_{t=2}^T (\bar{D}y_{i,t-1})^2},$$

а соответствующая ей t -статистика равна

$$t_{QGLS} = \delta_{QGLS} \frac{\hat{\phi}_{QGLS}}{\hat{\sigma}_e / \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{t=2}^T (\bar{D}y_{i,t-1})^2}},$$

где $\delta_{QGLS} = \sqrt{3/4}$. Локальная мощность теста будет равна $\Phi\left(-\frac{\sqrt{3}\mu_{c,1}}{2\sqrt{2}} + z_\xi\right)$.

Асимптотические результаты не зависят от $\bar{\kappa}$ и $\bar{c}$ и остаются теми же самыми, даже когда $\bar{c}_i$, $i = 1, \dots, N$, не равны. Сравнивая с асимптотической огибающей мощности, которая задается как (см. [17])

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{\mu_{c,2}}}{\sqrt{2}} + z_\xi\right) \geq \Phi\left(-\frac{\mu_{c,1}}{\sqrt{2}} + z_\xi\right)$$

с равенством при $c_1 = \dots = c_N$, тест t_{QGLS} имеет непренебрежимую локальную мощность внутри той же самой сокращающейся окрестности, что и огибающая, но будет ниже, чем огибающая, поскольку $\sqrt{3}/2\sqrt{2} \approx 0.612 < 1/\sqrt{2} \approx 0.707$. Однако

³ Например, в [Lopez(2009)] выбиралось $\bar{\kappa} = \kappa$, а в [Choi(2001)] – $\bar{\kappa} = 0$.

t_{QGLS} не лучше, чем статистики P_a и P_b , предложенные в [26], являющиеся оптимальными, как и статистика UB_{NT} .

Для практической реализации Вестерлунд рекомендует использовать $\bar{\kappa} = 0$ и $\bar{c} = -1$.

Подводя итог данного раздела, оптимальными тестами в случае наличия только фиксированных эффектов являются V_{NT} , UB_{NT} , P_a , P_b и $t - REC$, а тест LLC имеет несколько более низкую мощность. С другой стороны, при наличии трендов оптимальными тестами являются V_{NT} , P_a , P_b , затем идет UB_{NT} , а после статистика t^+ .

5 Наличие слабой зависимости ошибок

Как и в случае временных рядов, логично было бы предположить, что ошибки ε_{it} в (1) могут быть слабо зависимыми. Тогда, аналогично расширенному тесту Дики-Фуллера, можно аппроксимировать краткосрочную динамику добавлением запаздывающих разностей:

$$\Delta y_{it} = d_{it} + \phi_{i1} y_{i,t-1} + \sum_{j=1}^{p_i} \psi_{i,p_i} \Delta y_{i,t-j} + \varepsilon_{it}, \quad (25)$$

где d_{it} – некоторая детерминированная компонента.

В случае однородных альтернатив в LLC рекомендуется сначала очистить переменные от краткосрочной динамики, получая остатки e_{it} (v_{it}) от регрессии Δy_{it} (y_{it}) на $\Delta y_{i,t-j}$, $j = 1, \dots, p_i$, и d_{it} . Затем общий параметр ϕ можно оценить по регрессии пула

$$(e_{it}/\hat{\sigma}_i) = \phi(v_{i,t-1}/\hat{\sigma}_i) + v_{it}, \quad (26)$$

где $\hat{\sigma}_i^2$ – оцененная дисперсия e_{it} . Однако регрессия на первом шаге не удаляет всю зависимость в ошибках, поскольку

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{T-p} \sum_{t=p+1}^T e_{it} v_{i,t-1} / \sigma_i^2 \right] = \frac{\omega_i}{\sigma_i} \mu_{\infty}^*,$$

где ω_i^2 – долгосрочная дисперсия e_{it} . В LLC предлагается оценить ω_i^2 непараметрически, используя ряды в первых разностях:

$$\hat{\omega}_i^2 = \frac{1}{T} \left[\sum_{t=1}^T \widehat{\Delta y}_{it}^2 + 2 \sum_{l=1}^K \left(\frac{K+1-l}{K+1} \right) \left(\sum_{t=l+1}^T \widehat{\Delta y}_{it} \widehat{\Delta y}_{i,t-l} \right) \right],$$

где $\widehat{\Delta y}_{it} = \Delta y_{it} - T^{-1} \sum_{t=2}^T \Delta y_{it}$ – центрированный ряд разности, K – параметр усечения. Тогда статистика LLC в (14) принимает вид

$$Z_{LLC} = \frac{\sum_{i=1}^N (\Delta y'_{it} \mathbf{M}_1 y_{i,-1} / \hat{\sigma}_i^2 - \mu_T^* T \hat{\sigma}_i / \hat{\omega}_i)}{\sigma_T^* \sqrt{\sum_{i=1}^N y'_{i,-1} \mathbf{M}_1 y_{i,-1} / \hat{\sigma}_i^2}} = \frac{\tau_\phi}{\sigma_T^*} - \frac{\mu_T^* T}{\sigma_T^* \sqrt{\sum_{i=1}^N y'_{i,-1} \mathbf{M}_1 y_{i,-1} / \hat{\sigma}_i^2}} \times \sum_{i=1}^N \frac{\hat{\sigma}_i}{\hat{\omega}_i}. \quad (27)$$

Снова отметим, что в контексте временных рядов данная оценка, основанная на первых разностях, не была бы состоятельной, поскольку при стационарной альтернативе сходится к нулю по вероятности. В панелях, однако, данная оценка улучшает мощность теста, поскольку корректирующая компонента пропадает, и статистика стремится к $-\infty$.

Чтобы избежать непараметрического оценивания долгосрочной дисперсии можно использовать подход [35]. На первом шаге предлагается оценить регрессию Δy_{it} на детерминированную компоненту и лаги $\Delta y_{i,t-1}, \dots, \Delta y_{i,t-p_i}$. При нулевой гипотезе очищенный от краткосрочной динамики ряд $\hat{\psi}_i y_{it}$ является случайным блужданием с некоррелированными приращениями. Этот подход также можно использовать для модификации несмещенной статистики UB_{NT} , так что асимптотическая стандартная нормальность сохраняется.

В [36] указывается недостаток подхода LLC, который связан с тем, что скорость, при которой оценка долгосрочной дисперсии $\hat{\omega}_i$ сходится к нулю при альтернативе, очень низка, если параметр ширины окна не слишком велик. Таким образом, как показано автором на симуляциях, большинство методов для выбора ширины окна не являются адекватными. Все это приводит к сдвигу распределения вправо на конечных выборках, что приводит к потере мощности. В [37] предлагается подход, похожий на [35], который основан на следующей регрессии:

$$\Delta y_{it} = d_t + \phi_i y_{i,t-1}^* + \sum_{j=1}^{p_i} \psi_{i,p_i} \Delta y_{i,t-j} + \varepsilon_{it},$$

где $y_{i,t-1}^* = (\hat{\sigma}_i / \hat{\omega}_i) y_{i,t-1}$, где долгосрочная дисперсия ω_i оценивается параметрически на основе авторегрессионного представления. В этом случае, при использовании скорректированного запаздывания объясняющей переменной, $y_{i,t-1}^*$, статистика LLC корректируется аналогично случаю отсутствия краткосрочной динамики.

Отметим, что статистика, основанная на рекурсивном детрендровании, $t - REC$, предложенная в [29], не требует коррекции статистики на смещение, и требует простой очистки переменных от серийной корреляции после выполнения рекурсивного детрендрования.

GLS-теста t_{QGLS} , предложенный в [27], хотя и не является смещенным из-за наличия детерминированной компоненты, он будет смещенным из-за серийной корреляции. Пусть

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = N^{-1} \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_{\varepsilon i}^2, \quad \hat{\omega}_\varepsilon^2 = N^{-1} \sum_{i=1}^N \hat{\omega}_{\varepsilon i}^2, \quad \hat{\lambda}_\varepsilon = N^{-1} \sum_{i=1}^N \hat{\lambda}_{\varepsilon i}, \quad \hat{\phi}_\varepsilon^4 = N^{-1} \sum_{i=1}^N \hat{\omega}_{\varepsilon i}^4,$$

где $\hat{\sigma}_{\varepsilon i}^2$, $\hat{\omega}_{\varepsilon i}^2$ и $\hat{\lambda}_{\varepsilon i} = (\hat{\omega}_{\varepsilon i}^2 - \hat{\sigma}_{\varepsilon i}^2)/2$ – оценки дисперсии, долгосрочной дисперсии и односторонней долгосрочной дисперсии процесса ε_{it} . Тогда скорректированная статистика будет иметь вид

$$\hat{\phi}_{QGLS}^* = \hat{\phi}_{QGLS} + \frac{NT\hat{\lambda}_\varepsilon}{\sum_{i=1}^N \sum_{t=2}^T (\bar{D}y_{i,t-1})^2}, \quad (28)$$

и соответствующая t -статистика задается как

$$t_{QGLS}^* = \delta_{QGLS}^* \frac{\hat{\phi}_{QGLS}}{\hat{\omega}_\varepsilon / \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{t=2}^T (\bar{D}y_{i,t-1})^2}}, \quad (29)$$

где $\delta_{QGLS}^* = \sqrt{3\hat{\omega}_\varepsilon^4 / 4\hat{\phi}_\varepsilon^4}$.

Статистика IPS При наличии серийной корреляции строится точно также, как и в случае ее отсутствия, основываясь на статистиках расширенного теста Дики-Фуллера (а не обычного теста Дики-Фуллера), используя количество запаздывающих разностей, равное p_i для каждого i -го временного ряда. Для построения статистики IPS можно использовать средние и дисперсии, соответствующие каждому значению p_i .

6 Прочие тесты

1.6.1 Тесты, основанные на комбинации -значений

Отметим некоторые недостатки наиболее популярных тестов LLC и IPS. Во-первых, данные тесты требуют, чтобы число временных рядов в панели было бесконечным, но в то же время чтобы число групп должно было быть достаточно мало относительно временного интервала (формально $N/T \rightarrow 0$). В противном случае тесты не будут иметь корректный размер и в случае очень малых N , и в случае очень больших N . Во-вторых, для каждой группы требуется тот же самый тип детерминированной компоненты. В-третьих, предполагается одинаковый временной интервал для каждой группы (для IPS допускается ослабление этого

предположения, но возникает проблемы вычисления моментов для тестовой статистики). Кроме этого, хотя IPS утверждают, что их тест превосходит тест LLC, эти два типа тестов не совсем корректно сравнивать между собой, поскольку тест IPS является просто способом комбинирования свидетельства наличия единичного корня N тестов на единичный корень, примененных к N группам. Также с точки зрения асимптотической локальной мощности тест LLC более мощный, чем тест IPS (см. [11, Fact 2]).

В [34] и [38] независимо предлагается подход для решения данных проблем. В [38] предлагается тест против неоднородной альтернативы H_{1b} , основанный на p -значениях статистик, индивидуальных для каждого временного ряда, используя подход [39]. Обозначим некоторый тест на единичный корень для i -го временного ряда как G_i , тогда $p_i = F(G_i)$ – p -значение для этого теста, где $F(\cdot)$ – его функция распределения. Тогда предложенная авторами (правосторонняя) тестовая статистика будет иметь вид

$$P = -2 \sum_{i=1}^N \ln(p_i). \quad (30)$$

Альтернативная возможность скомбинировать тесты была предложена в [34], использующая обратный нормальный (левосторонний) тест, определенный как

$$Z = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \Phi^{-1}(p_i), \quad (31)$$

где $\Phi(\cdot)$ является функцией стандартного нормального распределения.

При нулевой гипотезе и при фиксированном N статистика P имеет распределение χ^2 с $2N$ степенями свободы, а Z имеет стандартное нормальное распределение. При $N \rightarrow \infty$ тест P расходится к бесконечности и его необходимо модифицировать следующим образом:

$$P^* = \frac{\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N (-2\ln(p_i) - 2)}{2}, \quad (32)$$

поскольку $E(-2\ln(p_i)) = 2$ и $Var(-2\ln(p_i)) = 4$. Однако при $N \rightarrow \infty$ тест Z все еще имеет стандартное нормальное распределение, то есть его можно использовать как при малых, так и при больших N .

В [40] дается объяснение контринтуитивного феномена, что у тестов, основанных на комбинации p -значений, увеличиваются искажения размера при росте N . Пусть мы получаем N p -значений для последующей их комбинации.

Однако для конечных T_i тесты не будут иметь размер, равный номинальному. Это приводит к тому, что p -значения не будут равномерно распределены на единичном интервале. Фактически p -значения будут равномерно распределены на интервале $[a, b]$, где $a \geq 0$ и $b \leq 1$. Автор рекомендует использовать выборочное распределение статистик, например, при помощи критических значений для конечных выборок.

6.2 LM-версии LLC и IPS

Можно построить LM версии тестов LLC и IPS:

$$\tilde{t}_\phi = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta y'_i \mathbf{M}_1 y_{i-1} / \tilde{\sigma}_i^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^N y'_{i-1} \mathbf{M}_1 y_{i-1} / \tilde{\sigma}_i^2}}, \quad (33)$$

и

$$\tilde{t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{t}_i, \quad (34)$$

где

$$\tilde{t}_i = \frac{\Delta y'_i \mathbf{M}_1 y_{i-1}}{\tilde{\sigma}_i \sqrt{y'_{i-1} \mathbf{M}_1 y_{i-1}}} \quad (35)$$

и

$$\tilde{\sigma}_i^2 = \frac{\Delta y'_i \mathbf{M}_1 \Delta y_i}{T-1}.$$

Отличия этих тестов от стандартных LLC и IPS заключается только в способе оценивания дисперсии σ_i^2 : в данном случае она оценивается при нулевой гипотезе. Однако тесты остаются асимптотически эквивалентными вне зависимости от способа оценивания дисперсии, поскольку обе оценки дисперсии являются состоятельными.

6.3 Альтернативные подходы

В [41] предлагаются модификации теста IPS. Авторы предлагают использовать подход [42], беря максимум из двух статистик для каждого конкретного ряда, первая из которых строится для конкретного ряда, а вторая – обращая во времени данные для этого же ряда. Далее, центрируя и нормируя сумму из таких индивидуальных статистик, можно получить стандартное нормальное распределение. Можно также аналогичным образом использовать подход [43], вместо обычной статистики Дики-Фуллера беря взвешенную симметричную (WS)

тестовую статистику. Еще один подход, уже описанный ранее, это использовать LM статистику или, аналогично [42], беря минимум из двух LM статистик.

В [44] предлагается в качестве статистики для i -го субъекта брать сумму знаков величины под суммой в числителе в обычной статистике Дики-Фуллера, игнорируя знаменатель. То есть такая статистика будет иметь вид

$$S_T^i = \sum_{t=1}^T \text{sign}(\Delta y_{it}) \text{sign}(y_{i,t-1} - \hat{\mu}_{i,t-1}),$$

где $\hat{\mu}_{i,t-1}$ – рекурсивная оценка среднего. Суммируя эти статистики по N , как $PS = \sum_{i=1}^N S_T^i$, авторы получают, что $(PS + N)/2$ имеет точное биномиальное распределение с параметрами N (число испытаний) и 0.5 (вероятность успеха), а статистика $PS/\sqrt{N}$ имеет асимптотически стандартное нормальное распределение. При наличии автокоррелированности Δy_{it} просто заменяется на остатки от регрессии Δy_{it} на свои запаздывающие значения. Тест [44], как было отмечено на симуляциях, является робастным к тяжелым хвостам распределения ошибок (при наличии больших выбросов).

В [45] предлагается статистика на единичный корень для неоднородных панелей, основанная на функции вклада. Полученный тест является более мощным, чем IPS, особенно в случае больших N и малых T .

В [46] обсуждается проблема, что во многих исследованиях относительно тестирования наличия панельного единичного корня требуется предположение, что $N/T \rightarrow 0$, что на практике означает, что T должно быть намного больше, чем N . Однако данное условие может быть и намного сильнее, как, например, в [47], где предполагалось N^5/T , что на практике означает, что T должно быть больше, чем N^5 (в этом случае при $N = 10$ T должно быть больше, чем 100000, что невозможно гарантировать на практике). В [46] разрабатывается тест отношения правдоподобий (LR) в модели

$$y_{it} = \rho y_{i,t-1} + \gamma + \mu_i + \lambda_t + \varepsilon_{it},$$

где μ_i и λ_t – индивидуальные и временные эффекты. Однако μ_i и λ_t , в отличие от большинства исследований по проверке панельного единичного корня, предполагаются не фиксированными эффектами, а случайными. Это значительно уменьшает количество параметров, которые нужно оценить. Это может привести к уменьшению смещения для корректировки оценки коэффициента, тем самым уменьшая зависимость от N/T . Авторы предлагают скорректированную на

смещение оценку $\hat{\phi}_{BC}$ для $\rho = 1$ и получают следующий асимптотический результат:

$$\sqrt{NT}^{3/2}\hat{\phi}_{BC} + \sqrt{NT}^{-3/2}6r_{\mu}^{-2} \Rightarrow \frac{\sqrt{12}}{r_{\mu}}N(0,1),$$

где $r_{\mu} = \sigma_{\mu}^2/\sigma_{\varepsilon}^2$. Важно отметить тот факт, что скорректированная на смещение оценка $\hat{\phi}_{BC}$ асимптотически эквивалентна MLE и не требует для этого предположения, что $N \rightarrow \infty$. Поэтому для получения предельного распределения выше требуется только условие $N/T^5 \rightarrow 0$, что допускает и случай $T/N \rightarrow 0$. Также скорость сходимости $\sqrt{NT}^{3/2}$ выше, чем скорость для обычной суперсостоятельной панельной оценки $\sqrt{NT}$. Причина последнего заключается в том, что μ_i при нулевой гипотезе порождает линейный тренд. Углы наклона $(\mu_1, \dots, \mu_N)$ имеют нулевое среднее и, следовательно, не влияют на среднее y_{it} . Однако дисперсия увеличивается, приводя к сильному сигналу от наличия единичного корня. Обозначая концентрированную функцию правдоподобия как $l_c(\phi)$, тест отношения правдоподобий будет иметь следующий вид

$$LR = -2(l_c(0) - l_c(\hat{\phi}_{BC})).$$

Тогда, если $N/T^3 \rightarrow 0$, LR будет иметь асимптотическое распределение $\chi^2(1)$. Если $N/T^3 \rightarrow c \in (0, \infty)$, то это же распределение будет иметь статистика $(\sqrt{LR} - \sqrt{3c}r_{\mu}^{-3/2})^2$. Если же $N/T^3 \rightarrow \infty$, но $N/T^5 \rightarrow 0$, то распределение $\chi^2(1)$ будет иметь статистика $(Tr_{\mu})^3(LR - 3NT^{-3}r_{\mu}^{-3})^2/(12N)$. Отметим, что данная статистика робастна к неправильной спецификации эффектов, при условии что σ_{μ}^2 заменяется на $\bar{\sigma}_{\mu}^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_{i=1}^N \mu_i$.

В [48] предлагается непараметрический и неасимптотический метод, основанный на событиях пересечения границы (boundary crossing events), то есть основанный на подсчете количества пересечений некоторых границ.

7 Влияние начальных значений

По сравнению с литературой по временным рядам, исследований по влиянию начальных значений на размер и мощность тестов на единичные корни в панельных данных достаточно мало, и результаты кардинально отличаются от результатов во временных рядах. В [49] выводится асимптотическая функция

локальной мощности IPS теста при наличии фиксированных эффектов. Начальные значения для каждого временного ряда в панели, ξ_i , задаются как

$$\xi_i = \alpha_i \sigma_{u,i}, \quad \sigma_{u,i} = \sqrt{\sigma_{\varepsilon,i}/(1 - \rho_i^2)}, \quad (36)$$

где α_i является *i. i. d.* $(\mu_\alpha, \sigma_\alpha^2)$ с конечным четвертым моментом и не зависят от ε_i , а $\sigma_{u,i}$ – краткосрочная дисперсия u_{it} для $\rho_i < 1$. Таким образом, начальное значение может быть либо фиксированным ($\sigma_\alpha^2 = 0$), либо случайным ($\sigma_\alpha^2 > 0$). Шкалирование на $\sigma_{u,i}$ делает каждое начальное значение ξ_i пропорциональным стандартному отклонению соответствующего ей процесса u_{it} . Локальная альтернатива принимает вид $\rho_i = 1 - c_i/\sqrt{N}T$. Тогда начальное значение при $c_i > 0$ является $O_p(N^{1/4}T^{1/2})$ (случай, когда начальное значение извлечено из безусловного распределения, см. [50] и [51]), то есть зависит от размерности кросс-секционных объектов, что может быть достаточно спорным. Однако авторы утверждают, что заданное таким образом начальное значение не обязательно должно быть эмпирически реалистично, что такая постановка предназначена только для упрощения их асимптотического анализа. При локальной альтернативе

$$\begin{aligned} Z_{IPS} \Rightarrow & N(0,1) + c \left[E(\sqrt{A}) + E\left(\frac{B_1}{\sqrt{A}}\right) - E\left(\frac{B_2 B_3}{\sqrt{A^3}}\right) \right] / \sqrt{V(\tau^\mu)} \\ & + c(\mu_\alpha^2 + \sigma_\alpha^2) \left[\frac{1}{48} E\left(\frac{B_2}{\sqrt{A^3}}\right) - \frac{3}{4} E\left(\frac{B_2 B_4^2}{\sqrt{A^5}}\right) \right] / \sqrt{V(\tau^\mu)}, \end{aligned} \quad (37)$$

где $c = \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_{i=1}^N c_i$, τ^μ – предельное распределение статистики Дики-Фуллера с константой,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 W^\mu(r)^2 dr, \\ B_1 &= \int_0^1 \left(\int_0^r W(s) ds - \int_0^1 \int_0^t W(s) ds dt \right) dW(r), \\ B_2 &= \int_0^1 W^\mu(r) dW(r), \\ B_3 &= \int_0^1 W^\mu(r) \left(\int_0^r W(s) ds - \int_0^1 \int_0^t W(s) ds dt \right) dr, \\ B_4 &= \int_0^1 \left(r - \frac{1}{2} \right) W^\mu(r) dr. \end{aligned}$$

Удаление компоненты при $\mu_\alpha^2 + \sigma_\alpha^2$ приводит к распределению при асимптотически пренебрежимых начальных значениях, когда $\xi_i = o_p(N^{1/4}T^{1/2})$ (сравните с [52, р. 287], где данное распределение приводится с ошибкой). Используя симуляции Монте-Карло, авторы аппроксимируют распределение (37) как

$$Z_{IPS} \Rightarrow N(0,1) + c[\delta_1 + \delta_2(\mu_\alpha^2 + \sigma_\alpha^2)], \quad (38)$$

где $\delta_1 \approx 0.282$ и $\delta_2 \approx -0.135$. Таким образом, при $\mu_\alpha^2 + \sigma_\alpha^2 = 0$ статистика Z_{IPS} приблизительно равна $N(0,1) + 0.282c$, так что мощность монотонно возрастает при росте c . Но мощность также монотонно убывает при росте $\mu_\alpha^2 + \sigma_\alpha^2$, и при $\mu_\alpha^2 + \sigma_\alpha^2 > 1.445$ мощность будет всегда ниже размера для любого выбранного уровня значимости. Поэтому, в отличие от теста Дики-Фуллера для одного временного ряда, когда мощность увеличивается при росте начального значения, в панелях эффект прямо противоположный. На конечных выборках, однако, при малых N все еще будет наблюдаться увеличение мощности при росте начальных значений, приблизительно для $N < 30$.

В [53] рассматривается более реалистичный способ задать начальное значение, чем в [49]. Автор предполагает, что инициализация начинается в некотором прошлом (аналогично [54] и [55] в случае временных рядов), в значении $u_{i,-T_0+1} = 0$ (или $u_{i,-T_0+1} = O_p(1)$), и относительная степень инициализации регулируется как $\tau_T = T_0/T$, где для простоты предполагается, что $T_0 = T_0(T) = T^\kappa$, $\kappa \geq 0$, так что $\tau_T = T^{\kappa-1}$. Вестерлунд рассматривает три случая,

1. $\kappa \in [0,1)$ – “недавнее прошлое”;
2. $\kappa = 1$ – “отдаленное прошлое”;
3. $\kappa > 1$ – “бесконечное прошлое”.

Процесс u_{it} можно записать как

$$u_{it} = \sum_{s=1}^{T_0-2} \rho_i^{t+s} \varepsilon_{i,-s} + \sum_{s=1}^t \rho_i^{t-s} \varepsilon_{is} = \rho_i^t u_{i0} + \sum_{s=1}^t \rho_i^{t-s} \varepsilon_{is},$$

где $u_{i0} = \sum_{s=1}^{T_0-2} \rho_i^s \varepsilon_{i,-s}$ – начальное значение порядка $O_p(T_0^{1/2}) = O_p(T^{\kappa/2})$. Можно думать о κ как о мере порядка величины эффекта начального значения по сравнению со случайным блужданием. Из первого случая следует, что $O_p(T^{\kappa/2}) = o_p(T^{1/2})$, начальное значение будет доминироваться случайным блужданием, из второго случая следует, что они будут иметь один и тот же стохастический порядок, и из третьего случая следует, что доминировать будет начальное значение.

Также предполагается, что $T = T(N) = N^\theta$ с $\theta > 0$, то есть $\theta_T = \theta_N = N^{\theta(\kappa-1)}$. Мера инерционности ρ_i задается как $\rho_i = \exp(\alpha_N c_i/T)$, где $\alpha_N = 1/N^\eta$,

$\eta \geq 0$, а c_i является *i.i.d.* и не зависит от ε_{it} . Техническое условие: $\theta(k - 1) - \eta \leq 0$.

Вестерлунд рассматривал только статистику LLC в регрессии пула. В отличие от временных рядов, где при $k \in [0,1]$ получается обычное распределение при наличии единичного корня, а при $k > 1$ получается распределение Коши, в панелях распределение будет всегда нормальным, но с разными средними. Мощность будет увеличиваться при увеличении степени инициализации, в отличие от временных рядов. В случае фиксированных эффектов распределение скорректированной статистики также будет нормальным и, что самое главное, не будет зависеть от инициализации при $k \in [0,1]$, что отличается от результата [49] и вообще от случая с временными рядами. Поэтому нет необходимости разработки робастной тестовой стратегии, так что автор предлагает просто игнорировать влияние начального значения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Levin A., Lin C., Chu C. Unit Root Tests in Panel Data: Asymptotic and Finite-sample Properties // *Journal of Econometrics*. — 2002. — Vol. 108. — P. 1–24.
- 2 Levin A., Lin C. Unit Root Tests in Panel Data: Asymptotic and Finite-sample Properties. — 1993. — Unpublished Manuscript.
- 3 Im K., Pesaran M., Shin Y. Testing for Unit Roots in Heterogenous Panels // *Journal of Econometrics*. — 2003. — Vol. 115. — P. 53–74.
- 4 Westerlund J., Larsson R. Testing for a unit root in a random coefficient panel data model // *Journal of Econometrics*. — 2012. — Vol. 167. — P. 254–273.
- 5 Chang Y., Song W. Unit Root Tests for Panels in the Presence of Short-run and Long-run Dependencies: Nonlinear IV Approach with Fixed N and Large T // *The Review of Economic Studies*. — 2009. — Vol. 76. — P. 903–935.
- 6 Karlsson S., L'othgren M. On the power and interpretation of panel unit root tests // *Economics Letters*. — 2000. — Vol. 66. — P. 249–255.
- 7 Giulietti M., Otero J., Smith J. Testing for unit roots in three-dimensional heterogeneous panels in the presence of cross-sectional dependence // *Economics Letters*. — 2008. — Vol. 101. — P. 188–192.
- 8 Breitung J. The Local Power of Some Unit Root Tests for Panel Data in B. Baltagi, T. B. Fomby, and R. C. Hill (eds.) // *Nonstationary Panels, Panel Cointegration, and Dynamic Panels, Advances in Econometrics*. — 2000. — Vol. 15. — P. JAI Press, Amsterdam, 161–178.
- 9 Phillips P., Moon H. Linear Regression Limit Theory for Nonstationary Panel Data // *Econometrica*. — 1999. — Vol. 67. — P. 1057–1111.
- 10 Moon H., Phillips P. Maximum likelihood estimation in panels with incidental trends // *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*. — 1999. — Vol. 61. — P. 771–748.
- 11 Westerlund J., Breitung J. Lessons From a Decade of IPS and LLC // *Econometric Reviews*. — 2013. — Vol. 32. — P. 547–591.
- 12 Nickell S. Biases in dynamic models with fixed effects // *Econometrica*. — 1981. — Vol. 49. — P. 1417–1426.

- 13 Hahn J., Kuersteiner G. Asymptotically unbiased inference for a dynamic panel model with fixed effects when both n and T are large // *Econometrica*. — 2002. — Vol. 70. — P. 1639–1657.
- 14 Moon R., Perron B. Testing for Unit Root in Panels with Dynamic Factors // *Journal of Econometrics*. — 2004. — Vol. 122. — P. 81–126.
- 15 Breitung J., Meyer W. Testing for Unit Roots in Panel Data: Are Wages on Different Bargaining Levels Cointegrated? // *Applied Economics*. — 1994. — Vol. 26. — P. 353–361.
- 16 Breitung J. Testing for unit roots in panel data using a GMM approach // *Statistical Papers*. — 1997. — Vol. 38. — P. 253–269.
- 17 Moon H., Perron B., Phillips P. Incidental Trends and the Power of Panel Unit Root Tests // *Journal of Econometrics*. — 2007. — Vol. 141. — P. 416–459.
- 18 Moon H., Perron B. Asymptotic local power of pooled t -ratio tests for unit roots in panels with fixed effects // *Econometrics Journal*. — 2008. — Vol. 11. — P. 80–104.
- 19 Sargan J. D., Bhargava A. Testing residuals from least squares regression for being generated by the Gaussian random walk // *Econometrica*. — 1983. — Vol. 51. — P. 153–174.
- 20 Moon H., Phillips P. GMM Estimation of Autoregressive Roots Near Unity with Panel Data // *Econometrica*. — 2004. — Vol. 72. — P. 467–522.
- 21 Moon H., Perron B., Phillips P. On the Breitung Test for Panel Unit Roots and Local Asymptotic Power // *Econometric Theory*. — 2006. — Vol. 22. — P. 1179–1190.
- 22 Westerlund J., Larsson R. New tools for understanding the local asymptotic power of panel unit root tests // *Journal of Econometrics*. — 2015. — Vol. 188. — P. 59–93.
- 23 Elliott G., Rothenberg T., Stock J. Efficient Tests for an Autoregressive Unit Root // *Econometrica*. — 1996. — Vol. 64. — P. 813–836.
- 24 Moon H., Perron B., Phillips P. Point-optimal panel unit root tests with serially correlated errors // *Econometrics Journal*. — 2014. — Vol. 17. — P. 338–372.
- 25 Becheri I., Drost F., van den Akker R. Asymptotically UMP Panel Unit Root Tests – the effect of heterogeneity in the alternatives // *Econometric Theory*. — 2015. — Vol. 31. — P. 539–559.

- 26 Bai J., Ng S. Panel unit root tests with cross-section dependence: a further investigation // *Econometric Theory*. — 2010. — Vol. 26. — P. 1088–1114.
- 27 Westerlund J. GLS Demeaning in Panel Unit Root Testing. — 2014. — Unpublished Manuskript.
- 28 The power envelope of panel unit root tests in case stationary alternatives offset explosive ones / I.G. Becheri, F.C. Drost, R. van den Akker, O. Wichert // *Statistics & Probability Letters*. — 2016. — Vol. 108. — P. 1–8.
- 29 Westerlund J. The effect of recursive detrending on panel unit root tests // *Journal of Econometrics*. — 2015. — Vol. 185. — P. 453–467.
- 30 Westerlund J. An IV test for a unit root in generally trending and correlated panels. — 2014. — Unpublished Manuskript.
- 31 Shin D. W., Kang S., Oh M.-S. Recursive mean adjustment for panel unit root tests // *Economics Letters*. — 2004. — Vol. 84. — P. 433–439.
- 32 Sul D. Panel unit root tests under cross section dependence with recursive mean adjustment // *Economics Letters*. — 2009. — Vol. 105. — P. 123–126.
- 33 Lopez C. A Panel Unit Root Test with Good Power in Small Samples // *Econometric Reviews*. — 2009. — Vol. 28. — P. 295–313.
- 34 Choi I. Unit Root Tests for Panel Data // *Journal of International Money and Finance*. — 2001. — Vol. 20. — P. 249–272.
- 35 Breitung J., Das S. Panel unit root tests under cross-sectional dependence // *Statistica Neerlandica*. — 2005. — Vol. 59. — P. 414–433.
- 36 Westerlund J. A note on the use of the LLC panel unit root test // *Empirical Economics*. — 2009. — Vol. 37. — P. 517–531.
- 37 Westerlund J., Blomquist J. A Modified LLC Panel Unit Root Test of the PPP Hypothesis // *Empirical Economics*. — 2013. — Vol. 44. — P. 833–860.
- 38 Maddala G., Wu S. A Comparative Study of Unit Root Tests with Panel Data and a New Simple Test // *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*. — 1999. — Vol. 61. — P. 631–652.
- 39 Fisher R. *Statistical Methods for Research Workers*. — Oliver and Boyd, London, 1932.
- 40 Hanck C. The Error-in-Rejection Probability of meta-analytic panel tests // *Economics Letters*. — 2008. — Vol. 101. — P. 27–30.

- 41 Smith L. V., Leybourne S. J., Kim T.-H. Newbold P. More powerful panel data unit root tests with an application to mean reversion in real exchange rates // *Journal of Applied Econometrics*. — 2004. — Vol. 19. — P. 147–170.
- 42 Leybourne S. Testing for unit roots using forward and reverse Dickey-Fuller regression // *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*. — 1995. — Vol. 57. — P. 559–571.
- 43 Pantula S., Gonzalez-Farias G., Fuller W. A Comparison of Unit-Root Test Criteria // *Journal of Business and Economic Statistics*. — 1994. — Vol. 12. — P. 449–459.
- 44 Oh Y., So B. Robust tests for unit roots in heterogeneous panels // *Economics Letters*. — 2004. — Vol. 84. — P. 35–41.
- 45 Oh Y., Lim Y., So B. A new score test for unit roots in heterogeneous panels – Residual likelihood approach // *Economics Letters*. — 2010. — Vol. 106. — P. 71–74.
- 46 Larsson R., Lyhagen J., Westerlund J. Likelihood Ratio Tests for a Unit Root in Panels with Random Effects. — 2014. — Unpublished Manuscript.
- 47 Demetrescu M., Hanck C. Unit root testing in heteroskedastic panels using the Cauchy estimator // *Journal of Business & Economic Statistics*. — 2012. — Vol. 30. — P. 256–264.
- 48 Farkas P., Matyas L. Testing for Unit Roots in Panel Data with Boundary Crossing Counts. — 2015. — Unpublished Manuscript.
- 49 Local asymptotic power of the Im-Pesaran-Shin panel unit root test and the impact of initial observations / D. Harris, D.I. Harvey, S.J. Leybourne, N.D. Sakkas // *Econometric Theory*. — 2010. — Vol. 26. — P. 311–324.
- 50 Elliott G. Efficient Tests for a Unit Root when the Initial Observation is Drawn from its Unconditional Distribution // *International Economic Review*. — 1999. — Vol. 40. — P. 767–783.
- 51 Muller U., Elliott G. Tests for Unit Roots and the Initial Condition // *Econometrica*. — 2003. — Vol. 71. — P. 1269–1286.
- 52 Breitung J., Pesaran M. Unit Roots and Cointegration in Panels in L. Matyas and P. Sevestre (eds.) // *The Econometrics of Panel Data: Fundamentals and Recent Developments in Theory and Practice*, Third Edition. — 2008. — P. Springer Publishers, Ch. 9, 279–322.

- 53 Westerlund J. Pooled Panel Unit Root Tests and the Effect of Past Initialization // *Econometric Reviews*. — 2013. — P. forthcoming.
- 54 Andrews D. W. K., Guggenberger P. Asymptotics for Stationary Very Nearly Unit Root Processes // *Journal of Time Series Analysis*. — 2008. — Vol. 29. — P. 203–210.
- 55 Phillips P. C. B., Magdalinos T. Unit Root and Cointegrating Limit Theory when Initialization is in the Infinite Past // *Econometric Theory*. — 2008. — Vol. 24. — P. 865–887.