

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»**

Петренко В.Д., Скроботов А.А., Турунцева М.Ю.

**Тестирование изменения инерционности
и влияние на качество прогнозов**

Москва 2016

Аннотация. В данной работе приводится обзор исследований, связанных с тестированием изменения инерционности временных рядов. Мы обсуждаем как тесты на проверку гипотез о постоянной/изменяющейся инерционности, включая методы анализа нескольких сдвигов в инерционности, так и процедуры оценивания дат сдвигов в инерционности и построение доверительных интервалов.

Abstract. This paper provides a review of contributions to the field of change in persistence testing. We discuss both the constant/changed persistence testing (including multiple changes in persistence testing) and methods of estimation and inference for the dates of persistence changes.

Скроботов А.А., научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории макроэкономического прогнозирования ИПЭИ Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ

Турунцева М.Ю., заведующий научно-исследовательской лабораторией макроэкономического прогнозирования ИПЭИ Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ

Петренко В.Д., научный сотрудник, ИЭП им. Гайдара

Данная работа подготовлена на основе материалов научно-исследовательской работы, выполненной в соответствии с Государственным заданием РАНХиГС при Президенте Российской Федерации на 2015 год.

Многие ряды экономических показателей имеют структурные изменения. Это могут быть изменения в форме сдвига уровня, или в форме изменения наклона тренда, или в комбинации этих двух форм. В таких ситуациях возможна проверка отсутствия (наличия) структурного изменения при помощи соответствующих процедур (см. (Perron, 2006) в качестве обзора). Эти процедуры предполагают, что временной ряд, при удалении из него детерминированного тренда и до, и после момента изменения является интегрированным рядом одного и того же порядка, $I(1)$ или $I(0)$. Если же до момента изменения временной ряд описывается $I(0)$ моделью, а после момента изменения описывается $I(1)$ моделью (или наоборот), то возникают некоторые трудности.

Понятие инерционности (persistence) временного ряда связано с выделением двух классов временных рядов: стационарных (TS) и нестационарных (DS). В TS-рядах отсутствует стохастический тренд, влияние предыдущих шоковых воздействий затухает с течением времени, а в DS-рядах, имеющих стохастический тренд, такое затухание отсутствует, и каждый отдельный шок влияет с одинаковой силой на все последующие значения ряда. Поэтому наличие стохастического тренда у макроэкономической переменной требует проведения определенной экономической политики для возвращения этой переменной к ее долговременной перспективе – в такой ситуации говорят о высокой инерционности соответствующего показателя. При отсутствии стохастического тренда особых усилий для достижения такой цели не требуется: макроэкономическая переменная пересекает линию тренда достаточно часто и не отклоняется далеко от этой линии – в такой ситуации говорят о низкой инерционности экономического показателя.

В случае авторегрессионного представления модели, порождающей ряд,

$$y_t = \mu + a_1 y_{t-1} + \dots + a_k y_{t-k} + \varepsilon_t, \quad a(L)y_t = \mu + \varepsilon_t,$$

рассматривают два показателя, характеризующих меру инерционности: сумму коэффициентов уравнения авторегрессии

$$a(1) = a_1 + \dots + a_k$$

и ρ_{\max} – наибольший корень уравнения $a(z^{-1}) = 0$. Существует и иное измерение инерционности, связанное с вычислением так называемого периода полураспада (half-life), который обозначает число периодов, в которых временной ряд остается выше 0.5, следуя за единичным шоком (см. (Rossi, 2005)).

Многие авторы используют модели, в которых при переходе от одного периода наблюдений к последующему изменяются некоторые параметры модели, но степень инерционности модели не изменяется. К числу таких исследований можно отнести, например, работу (Stock & Watson, 2007), где подбирается модель инфляции в США в виде зашумленного случайного блуждания, в которой зашумляющий ряд и белый шум, порождающий случайное блуждание, имеют переменные дисперсии.

В работе (Kim, 2000) автор одним из первых разработал формальную теорию для нахождения структурного сдвига, характеризующегося сдвигом в инерционности временного ряда. Пусть при нулевой гипотезе H_0 процесс y_t является стационарным с постоянной инерционностью в течение всего периода выборки. При альтернативной гипотезе H_{01} процесс y_t является стационарным с постоянной инерционностью до некоторого момента времени, после которого становится процессом с более высокой инерционностью, такой как при наличии единичного корня. Возможна и другая альтернатива H_{10} , при которой сначала процесс y_t имеет более высокую инерционность относительно второго периода.¹

¹ Данный подход в некотором смысле является альтернативой моделирования процессов с детерминированным структурным сдвигом с постоянной инерционностью, см. графическое свидетельство в (Kurozumi, 2005), стр. 184.

В качестве примера можно привести то, что на протяжении многих лет в экономической литературе обсуждается проблема инерционности инфляции и связи инерционности инфляции с денежно-кредитной политикой. Главный вопрос: является ли инерционность инфляции врождённой особенностью экономики, так что инерционность инфляции инвариантна относительно денежно-кредитной политики. Если это не так, то тогда использование "назад-смотрящих" моделей может приводить к ошибочным выводам. В этом состояла так называемая "критика Лукаса", согласно которой параметры макроэкономической модели зависят неявно от ожиданий агентов, и поэтому эти параметры не могут оставаться неизменными, когда полисмейкеры изменяют свое поведение. Однако часто инерционность инфляции может меняться в определенные моменты времени, и для моделирования необходимо учитывать момент этого изменения. Кроме инфляции обычно рассматривают ряды валового внутреннего продукта и процентных ставок в качестве рядов с возможным изменением инерционности. Также знание момента изменения инерционности может помочь при прогнозировании конкретного экономического показателя (см. (Kruse, 2013)). Кроме этого можно проводить мониторинговые процедуры для обнаружения момента смены режима инерционности в режиме реального времени (см. (Chen, et al., 2010)).

1. Модель и тестируемые гипотезы

Следуя (Kim, 2000), нулевую гипотезу можно записать как

$$H_0 : y_t = \mu_0 + u_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (1)$$

где μ_0 является константой, а u_t – стационарный процесс, удовлетворяющий стандартным условиям. В процесс (1) можно также включить линейный тренд.

Рассмотрим сначала альтернативную гипотезу H_{01} , где происходит переключение со стационарного режима на нестационарный, $I(0) \rightarrow I(1)$. Пусть смена режима происходит в момент $[\lambda^0 T]$, где $\lambda^0 \in (0, 1)$, причем $y_t \sim I(0)$ для $0 < t \leq [\lambda^0 T]$ и $y_t \sim I(1)$ для $[\lambda^0 T] < t \leq T$. Другими словами,

$$y_t = \begin{cases} \mu_0 + u_{t,0} & t = 1, \dots, [\lambda^0 T], \\ \mu_1 + u_{t,1} & t = [\lambda^0 T] + 1, \dots, T, \end{cases} \quad (2)$$

где $u_{t,0}$ – стационарный процесс, а $u_{t,1}$ – процесс с более высокой инерционностью ($I(1)$), чем $u_{t,0}$, μ_0 и μ_1 – константы.

Точно также рассмотрим альтернативу H_{10} , при которой происходит переход не от $I(0)$ к $I(1)$, а от $I(1)$ к $I(0)$:

$$y_t = \begin{cases} \mu_1 + u_{t,1} & t = 1, \dots, [\lambda^0 T], \\ \mu_0 + u_{\lambda^0 T, 1} + u_{t,0} & t = [\lambda^0 T] + 1, \dots, T, \end{cases} \quad (3)$$

где процессы $u_{t,0}$ и $u_{t,1}$ определяются, как и ранее, а компонента $u_{[\lambda^0 T], 1}$ в стационарном режиме предназначена для того, чтобы исключать ложные скачки к нулю в момент сдвига (то есть стационарный режим начинается с точки окончания нестационарного режима, см. также Раздел 6). Аналогично можно добавить тренд в (2) и (3), который может изменяться или не изменяться при переходе на новый режим.²

² В (Busetti & Taylor, 2004) рассматривается возможность полиномиального тренда и структурного сдвига в детерминированной компоненте в момент времени, отличным от момента изменения инерционности. Все

Альтернативную гипотезу вида H_{01} можно записать иначе в виде

$$y_t = d_t + v_t + \varepsilon_t, \quad (4)$$

$$v_t = v_{t-1} + \mathbf{I}(t > [\lambda^0 T])\eta_t, \quad (5)$$

где ε_t и η_t – взаимно независимые процессы с дисперсиями σ^2 и $\sigma_\eta^2 \sigma^2$. В этом случае нулевая гипотеза эквивалентно определяется как $\sigma_\eta^2 = 0$ против альтернативы $\sigma_\eta^2 > 0$. Здесь лучше видно, что $\lambda^0 = 0$ соответствует $I(1)$ процессу с постоянной инерционностью.

Аналогично альтернативу H_{10} можно записать как

$$y_t = d_t + v_t + \varepsilon_t, \quad (6)$$

$$v_t = v_{t-1} + \mathbf{I}(t \leq [\lambda^0 T])\eta_t, \quad (7)$$

так что $\lambda^0 = 1$ соответствует $I(1)$ процессу с постоянной инерционностью.

2. Тесты на основе отношения

В (Kim, 2000) (см. также исправления в (Kim, et al., 2002)) автор разрабатывает тест на основе отношения, который строится следующим образом. Если структурный сдвиг происходит в момент времени $t = [\lambda T]$ для $\lambda \in (0,1)$, мы можем определить следующие процессы частичных сумм до и после $[\lambda T]$: $S_{0,t}(\lambda) = \sum_{i=1}^t \hat{u}_{0,i}$ для $t = 1, \dots, [\lambda T]$ и $S_{1,t}(\lambda) = \sum_{i=[\lambda T]+1}^t \hat{u}_{1,i}$ для $t = [\lambda T]+1, \dots, T$, где $\hat{u}_{0,t}$ и $\hat{u}_{1,t}$ – остатки от регрессии y_t на соответствующую детерминированную компоненту в каждом из подпериодов.³ Автор рассматривает следующую статистику:

$$K(\lambda) = \frac{[(1-\lambda)T]^{-2} \sum_{t=[\lambda T]+1}^T S_{1,t}(\lambda)^2}{[\lambda T]^{-2} \sum_{t=1}^{[\lambda T]} S_{0,t}(\lambda)^2}. \quad (8)$$

Если истинная дата сдвига неизвестна, Ким предлагает использовать следующие три статистики:

$$K(\hat{\lambda}) = \max_{\lambda \in \Lambda} K(\lambda), \quad (9)$$

$$EK(\lambda) = \int_{\lambda \in \Lambda} K(\lambda) d\lambda, \quad (10)$$

$$\log E \exp(K(\lambda)) = \log \left\{ \int_{\lambda \in \Lambda} \exp(K(\lambda)) d\lambda \right\} \quad (11)$$

Первая из этих статистик происходит из работы (Hansen, 1991), вторая – из работы (Andrews & Ploberger, 1994), третья – из работы (Andrews, 1993). Возможен еще один вариант, предложенный в (Leybourne & Taylor, 2004), в котором от числителя статистики $K(\lambda)$ берется максимум, а от знаменателя берется минимум.

рассматриваемые процедуры строятся аналогично, используя детрендрование с соответствующей детерминированной компонентой на конкретном периоде.

³ В (Kim, 2000) изначально была предложена статистика, в которой вместо $\hat{u}_{0,t}$ и $\hat{u}_{1,t}$ использовались остатки от регрессии y_t на детерминированную компоненту по всему периоду наблюдений. Это, однако, будет приводить к несостоятельному тесту.

Видно, что числитель и знаменатель для $K(\lambda)$ похожи на числитель в KPSS-статистике, так что предельное распределение $K(\lambda)$ является отношением соответствующих распределений Крамера-фон Мизеса (первого порядка).⁴ Распределения статистик (9) - (11) являются соответствующими функциями от распределения $K(\lambda)$. Нулевая гипотеза отвергается в пользу H_{01} (H_{10}), если значение тестовой статистики больше (меньше), чем правостороннее (левостороннее) критическое значение. В (Busetti & Taylor, 2004) был рассмотрен случай локальной альтернативы вида $\sigma_\eta^2 = c^2 / T^2$, $c \geq 0$. Для фактического вычисления статистик (10) и (11) интегралы в функционалах заменяются на средние, см. также (Hansen, 1997).

Важно еще отметить, что критические значения статистик (10) и (11) отличаются в работах (Kim, et al., 2002) и (Busetti & Taylor, 2004). Это связано с тем (см. (Hassler & Scheithauer, 2008)), что аппроксимирующие суммы для интегралов делятся либо на T в (Kim, et al., 2002), либо на фактическое количество наблюдений, ограничиваясь множеством перебора дат сдвигов из $\Lambda = [\lambda_L, \lambda_U]$ (то есть на $T^* = [\lambda_U] - [\lambda_L] + 1$). Другое отличие заключается в том, что под экспонентой в (11) в (Busetti & Taylor, 2004) статистика $K(\lambda)$ дополнительно умножается на 0.5.

Статистика является состоятельной, поскольку при H_{01} во второй части выборки процесс нестационарный, следовательно, либо числитель является $O_p(T^2)$ и знаменатель является $O_p(1)$, если $\lambda \leq \lambda^0$, так что статистика является $O_p(T^2)$, либо и числитель, и знаменатель являются $O_p(T^2)$, если $\lambda > \lambda^0$, так что статистика будет $O_p(1)$. Беря максимум, получаем, что максимум от (8) по всем возможным датам сдвига является $O_p(T^2)$. Аналогичные рассуждения применяются для других функций от статистики (8).⁵ Если рассматривать альтернативу H_{10} , то статистика является $O_p(T^{-2})$ при $\lambda^0 \leq \lambda$ и $O_p(1)$ в противном случае. Поэтому отвержение при малых значениях статистики, если дата сдвига известна, приводит к состоятельному тесту. Однако при неизвестной дате сдвига все функционалы от статистики ($K(\lambda)$) будут $O_p(1)$, что делает тест несостоятельным. В (Busetti & Taylor, 2004) предлагается использовать обратное значение статистики $K(\lambda)$, что даст состоятельные статистические выводы. При нулевой гипотезе асимптотические распределения этих "обратных" статистик будут сохраняться (следовательно, критические значения остаются теми же самыми), но не будут независимыми от распределений "прямых" статистик.

Важно отметить, что тест $K(\lambda)$, построенный против альтернативы $I(0) \rightarrow I(1)$, не является состоятельным против альтернативы $I(1) \rightarrow I(0)$ и наоборот. Если направление изменения неизвестно, нужно использовать двухсторонний тест, отвергая нулевую гипотезу при больших или малых значениях статистики. Однако, как уже было отмечено, этот подход является обоснованным, если дата сдвига известна. В противном случае процедура будет состоятельной только в направлении $I(0) \rightarrow I(1)$. Для решения этой проблемы в (Busetti & Taylor, 2004) предлагается брать максимум от двух статистик, $K(\lambda)$ и $(K(\lambda))^{-1}$.

⁴ Отметим, что корректное предельное распределение приведено в (Kim, et al., 2002) и (Busetti & Taylor, 2004).

⁵ Ким также анализирует асимптотическую мощность, если при альтернативе $u_{t,1}$ является стационарным процессом, но с более высокой инерционностью, см. также (Leybourne & Taylor, 2006).

Хотя тесты на основе отношения не требуют учета слабой зависимости ошибок (через вычисление долгосрочной дисперсии, как в KPSS), в (Leybourne & Taylor, 2004) предлагается модификация для конечных выборок, в которой числитель и знаменатель статистики $K(\lambda)$ в (8) шкалируется на отношение долгосрочных дисперсий по второй и по первой частям выборки.

Другие (флуктуационные) тесты, основанные на отношении, были предложены в (Taylor, 2005). Обобщая тесты, предложенные в (Xiao, 2001), основанные на частичной сумме остатков, в (Taylor, 2005) предлагаются следующие статистики:

$$KS = \frac{[(1-\lambda)T]^{-1/2} \max_{t=\lambda T+1, \dots, T} |S_{1,t}(\lambda)|}{[\lambda T]^{-1/2} \max_{t=1, \dots, \lambda T} |S_{0,t}(\lambda)|} \quad (12)$$

$$RS = \frac{[(1-\lambda)T]^{-1/2} \left(\max_{t=\lambda T+1, \dots, T} S_{1,t}(\lambda) - \min_{t=\lambda T+1, \dots, T} S_{1,t}(\lambda) \right)}{[\lambda T]^{-1/2} \left(\max_{t=1, \dots, \lambda T} S_{0,t}(\lambda) - \min_{t=1, \dots, \lambda T} S_{0,t}(\lambda) \right)} \quad (13).$$

Первый тест является *maximal recursive-estimates-based* тестом, а второй *rescaled range-based* тестом. Итоговые тестовые статистики при неизвестной дате сдвига и неизвестном направлении изменения инерционности строятся путем взятия соответствующего функционалов от статистик (12) и (13), а затем беря максимум от обычного и обратного функционалов. Полученные тестовые статистики имеют аналогичные асимптотические свойства, что и статистика, основанная на частном двух KPSS-статистик. Также можно применить то же самое шкалирование на долгосрочные дисперсии, что и в (Leybourne & Taylor, 2006).

В (Harvey, et al., 2006) и (Leybourne, et al., 2006) обсуждается возможность тестирования нулевой гипотезы, что ряд имеет постоянную инерционность, то есть либо $I(0)$, либо $I(1)$, против альтернативы об изменении инерционности. Статистика K остается $O_p(1)$ вне зависимости от того, является ли процесс с постоянной инерционностью $I(1)$ или $I(0)$. Однако, если мы хотим тестировать нулевую гипотезу о постоянной инерционности, $I(1)$ или $I(0)$, нулевая гипотеза будет часто отвергаться (до 90% случаев), если процесс порождения данных является $I(1)$ с постоянной инерционностью (поскольку критические значения при $I(0)$ будут отличаться от критических значений при $I(1)$).

В (Leybourne, et al., 2006) предлагается использовать накопленные суммы квадратов остатков (что дает название тесту – CUSUM-тест). Строятся две стандартизированные накопленные суммы квадратов OLS-остатков,

$$K^f(\lambda) = \frac{[\lambda T]^{-2} \sum_{t=1}^{[\lambda T]} \hat{u}_{0,t}^2}{\hat{\omega}_f^2(\lambda)} \quad (14)$$

$$K^r(\lambda) = \frac{[(1-\lambda)T]^{-2} \sum_{t=1}^{[(1-\lambda)T]} \hat{u}_{1,t}^2}{\hat{\omega}_r^2(\lambda)}, \quad (15)$$

где $\hat{\omega}_f^2(\lambda)$ и $\hat{\omega}_r^2(\lambda)$ – соответствующие оценки долгосрочных дисперсий, основанные на рядах $\Delta \hat{u}_{0,t}^2$ и $\Delta \hat{u}_{1,t}^2$. $K^f(\lambda)$ сходится по вероятности к нулю при H_{01} для $\lambda \leq \lambda^0$ и является $O_p(1)$ при H_{10} для всех λ . $K^r(\lambda)$ наоборот, сходится по вероятности к нулю при H_{10} для $\lambda > \lambda^0$ и является $O_p(1)$ при H_{01} для всех λ . Следовательно, если дата сдвига известна,

можно построить отношение $K^f(\lambda^0)$ к $K^r(\lambda^0)$, которое расходуется к бесконечности при H_{01} и сходится к нулю при H_{10} . Тогда при больших или малых значениях этого отношения можно отвергать гипотезу о постоянной инерционности $I(1)$ (то есть двухсторонним тестом).

Если дата сдвига неизвестна, в (Leybourne, et al., 2006) предлагается использовать тестовую статистику

$$R = \frac{\inf_{\lambda \in \Lambda} K^f(\lambda)}{\inf_{\lambda \in \Lambda} K^r(\lambda)}. \quad (16)$$

Полученный (двухсторонний) тест остается состоятельным при тестировании $I(1)$ против альтернативы об изменении инерционности. Хвост распределения, в котором гипотеза отверглась, может использоваться для идентификации направления изменения. Данный тест отличается тем, что в случае $I(0)$ процесса (с постоянной инерционностью) статистика R сходится по вероятности к единице, так что тест на основе этой статистики будет консервативным при использовании обычных уровней значимости, поскольку при $I(0)$ соответствующие критические значения ниже (для левого хвоста) и выше (для правого хвоста), чем значение 1.⁶

В (Harvey, et al., 2006) предлагается другой подход, основанный на шкалировании тестовых статистики на такую функцию (см. подход (Vogelsang, 1998)), чтобы при $I(0)$ она стремилась к 1, оставляя критические значения теми же самыми, а при $I(1)$ она была бы $O_p(1)$, что давало бы возможность шкалировать множитель таким образом, чтобы критические значения совпадали со случаем $I(0)$. В качестве такой функции берутся $\exp(-dJ_{\min})$ и $\exp(-dJ_{\min^R})$, где J_{\min} – минимум тестовой статистики для проверки значимости полиномиального тренда (за исключением исходной детерминированной компоненты) в регрессии y_t по всем возможным датам сдвига по первой части выборки, а J_{\min^R} – минимум тестовой статистики для проверки значимости полиномиального тренда в y_t по всем возможным датам сдвига по второй части выборки. Параметр d предназначен для шкалирования статистики, чтобы при $I(1)$ она имела то же самое предельное распределение. В качестве итоговой тестовой статистики авторы предлагают домножать статистику $\max\{K(\lambda), (K(\lambda))^{-1}\}$ на $\exp(-d \min[J_{\min}, J_{\min^R}])$.

В (Cavaliere & Taylor, 2008)⁷ исследуется влияние нестационарной волатильности (включающей в себя единственный или множественные сдвиги в волатильности, а также полиномиально-трендовую волатильность, гладкий сдвиг в дисперсии и др.) на тесты (Kim, 2000). Авторы обнаруживают, что частое отвержение нулевой гипотезы об отсутствии изменения инерционности может происходить из-за наличия сдвига в волатильности, а не изменения инерционности. Для анализа асимптотического поведения $I(0)$ ошибки $u_{t,0}$ в (2) или (3) предполагаются равными $u_{t,0} = \sigma_t \varepsilon_t$, где $\{\sigma_t\}$ удовлетворяет $a_T^{-1} \sigma_{sT} = \omega(s)$ и $\{a_T\}$ – строго положительная детерминированная последовательность, $\omega(s) \in D$ – положительная неслучайная функция с конечным числом точек разрыва, удовлетворяющая условию Липшица первого порядка, за исключением точек

⁶ Можно также использовать минимум из числителя и знаменателя статистики R для тестирования нулевой гипотезы, но такой тест будет некорректно отвергать нулевую гипотезу о постоянной инерционности при $I(0)$.

⁷ В (Cavaliere & Taylor, 2006) рассматривался частный случай единственного сдвига в волатильности.

разрывности. Данное условие на $\omega(s)$ можно обобщить, предполагая случайность этой функции и рассмотреть, например, модель стохастической волатильности, модель с нестационарными дисперсиями с марковскими переключениями, почти-интегрированные GARCH и др. Последовательность $u_{i,1}$ определяется как накопленные суммы $I(0)$ ряда.

На основе сделанных предположений в (Cavaliere & Taylor, 2008) устанавливается, что предельные распределения тестовых статистик на основе отношения будут зависеть от мешающих параметров, связанных с траекторией процесса волатильности. Кроме того, коррекция на долгосрочные дисперсии (Leybourne & Taylor, 2004) будет приводить к дополнительной компоненте в асимптотическом распределении тестовой статистики, которая будет отличаться от нестандартизированной версии (кроме случая с единственным сдвигом в волатильности). Эта компонента, однако, не будет зависеть от долгосрочных дисперсий. Для получения корректных статистических выводов авторы предлагают использовать дикий бутстреп, поскольку он позволяет воспроизвести характер нестационарной волатильности, представленной в ошибках. Более конкретно, на первом шаге проводится регрессия по всей выборке y_t на детерминированную компоненту, а затем полученные остатки \hat{u}_t умножаются на независимую последовательность $N(0,1)$, получая бутстреповские данные. Затем на основе этих бутстреповских данных строятся бутстреповские статистики. Эти бутстреповские статистики имеют то же самое предельное распределение, что и оригинальные статистики, а соответствующие p -значения распределены равномерно при нулевой гипотезе, что приводит к асимптотически корректному размеру. При альтернативе бутстреповские статистики состоятельны с той же скоростью, что и оригинальные статистики. Симуляции Монте-Карло подтверждают полученные асимптотические результаты.

Отметим, что хотя рассмотренные выше тесты являются параметрическими, в (Furno, 2014) были также предложены непараметрические (основанные на знаках) тесты.

3. Тесты на $I(0)$ против альтернативы об изменении инерционности или $I(1)$

Иногда исследователю нужно тестировать гипотезу о постоянной инерционности заданного порядка ($I(0)$ или $I(1)$) против альтернативы либо об изменении инерционности, либо против постоянной инерционности другого порядка. В (Busetti & Taylor, 2004) показывается, что тесты $K(\lambda)$ и $(K(\lambda))^{-1}$ не имеют мощности, стремящейся к единице, против $I(1)$ процесса с постоянной инерционностью на всем периоде. То же самое выполняется, если множества $[0, \lambda^0]$ (в случае H_{01}) или $[\lambda^0, 1]$ (в случае H_{10}) и Λ не пересекаются.

В (Busetti & Taylor, 2004) предлагается так называемый локально-наилучший инвариантный тест (LBI), статистика которого имеет вид (для произвольной даты сдвига λ) при H_{01} ($I(0) \rightarrow I(1)$)

$$VT_1(\lambda) = \hat{\omega}^{-2}[(1-\lambda)T]^{-2} \sum_{t=[\lambda T]+1}^T \left(\sum_{j=t}^T \hat{u}_j \right)^2, \quad (17)$$

где $\hat{\omega}^2$ – долгосрочная дисперсия \hat{u}_t , и при H_{10} ($I(1) \rightarrow I(0)$)

$$VT_0(\lambda) = \hat{\omega}^{-2}[\lambda T]^{-2} \sum_{t=1}^{[\lambda T]} \left(\sum_{j=t}^T \hat{u}_j \right)^2, \quad (18)$$

Заметим, что статистики $BT_1(0)$ и $BT_0(1)$ являются обычными KPSS-статистиками, которые в свою очередь являются LBI против альтернативы о $I(1)$ с постоянной инерционностью. Асимптотическое распределение $BT_1(\lambda)$ равно распределению $BT_0(1-\lambda)$. Если дата сдвига неизвестна, то используются те же самые функционалы, как и в (9) - (11), хотя уже и не существует LBI теста. Отвержение H_0 не может в этом случае интерпретироваться, что процесс является $I(1)$ с постоянной инерционностью, а интерпретируется, что есть подпериоды с нестационарным поведением. Статистики (17) и (18) являются состоятельными против H_{01} и H_{10} , а также против $I(1)$ процесса с постоянной инерционностью.

Авторы также предлагают просто использовать KPSS-статистику при H_{01} по последним $(1-\lambda)T$ наблюдениям :

$$KPSS(\lambda, 1) = \hat{\omega}_1^{-2} [(1-\lambda)T]^{-2} \sum_{t=[\lambda T]+1}^T \left(\sum_{j=\lambda T+1}^t \hat{u}_{1,j} \right)^2, \quad (19)$$

где $\hat{\omega}_1^2$ – долгосрочная дисперсия $\hat{u}_{1,t}$ по последним $[(1-\lambda)T]$ наблюдениям, и при H_{10} по первым λT наблюдениям

$$KPSS(0, \lambda) = \hat{\omega}_0^{-2} [\lambda T]^{-2} \sum_{t=1}^{[\lambda T]} \left(\sum_{j=\lambda T+1}^t \hat{u}_{0,j} \right)^2, \quad (20)$$

где $\hat{\omega}_0^2$ – долгосрочная дисперсия $\hat{u}_{0,t}$ по первым $[\lambda T]$ наблюдениям. Эти статистики являются числителем и знаменателем статистики $K(\lambda)$ в (8), шкалированные на дисперсию. При неизвестной дате сдвига также можно использовать функционалы, как в (9) - (11). При альтернативе статистики имеют те же самые свойства, что и BT_1 и BT_0 .

В отличие от тестов на основе отношения, состоятельность LBI-тестов выполняется вне зависимости от направления изменения для функционалов от $BT_1(\lambda)$, $BT_0(\lambda)$, $KPSS(\lambda, 1)$ и $KPSS(0, \lambda)$. Однако, если применять тесты, построенные при "неправильной" альтернативе, можно получить более низкую мощность. Для решения этой проблемы в (Busetti & Taylor, 2004) предлагается брать максимум от двух статистик, $BT_1(\lambda)$ и $BT_0(\lambda)$ (но не $KPSS(\lambda, 1)$ и $KPSS(0, \lambda)$). На основе симуляций авторы показывают, что LBI-тесты имеют более высокую мощность, чем тесты на основе отношения, а знание времени изменения не дает особых преимуществ. Также в работе делается предложение, что несостоятельность теста на основе отношения, $K(\lambda)$, против "неправильной" альтернативы можно использовать для идентификации направления изменения, когда оно неизвестно.

4. Тесты на $I(1)$ против альтернативы об изменении инерционности или $I(0)$

Все тесты, описанные выше, основывались на статистиках для проверки стационарности (таких как, например, KPSS). В (Lebourne, et al., 2003) авторы предлагают использовать тесты на единичный корень для построения статистик. Рассмотрим для начала тестирование наличия единичного корня против альтернативы $I(0) \rightarrow I(1)$. Пусть рассматривается выборка, включающая наблюдения $t=1, \dots, [\lambda T]$. По

этой выборке производится обычное (квази) GLS-детрендрование, аналогично ERS, и строятся GLS-детрендрованные данные \tilde{u}_t , которые затем используются в следующей ADF-регрессии:

$$\Delta \tilde{u}_t = \hat{\alpha}(\lambda) \tilde{u}_t + \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\phi}_j(\lambda) \Delta \tilde{u}_{t-j} + e_{t,k}, \quad t=1, 2, \dots, \lambda T. \quad (21)$$

Эта регрессия построена только по первой части выборки, до момента времени λT . Обозначим t -статистику, связанную с $\hat{\alpha}(\lambda)$, как $ADF_G^f(\lambda)$. Авторы предлагают использовать *рекурсивную* тестовую статистику, которую можно записать как

$$ADF_G^{f,\text{inf}} = \inf_{\lambda \in \Lambda} ADF_G^f(\lambda).$$

Значение λ , в котором достигается инфимум статистики, дает состоятельную оценку истинной доли даты сдвига λ^0 . Эта статистика аналогична рекурсивной статистике, предложенной в (Banerjee, et al., n.d.) для OLS-детрендрованных данных.

Рекурсивная процедура, однако, не является эффективной, поскольку ADF-регрессия (21) использует только долю λ от выборки. В (Leybourne, et al., 2003) предлагается учесть серийную корреляцию и дисперсию инноваций от всей выборки (что увеличит мощность на конечных выборках, но не изменит предельное распределение статистики) путем построения следующей ADF-регрессии :

$$\Delta \tilde{u}_t = \bar{\alpha}(\lambda) D_t(\lambda) \tilde{u}_t + \sum_{j=1}^{k-1} \bar{\phi}_j(\lambda) \Delta \tilde{u}_{t-j} + e_{t,k}, \quad t=1, 2, \dots, T, \quad (22)$$

где $D_t(\lambda) = I(t \leq [\lambda T])$, $\Delta \tilde{u}_t$ – GLS-детрендрованные данные для $t \leq [\lambda T]$, но $\Delta \tilde{u}_t = \Delta y_t - \overline{\Delta y_{(2)}}$ для $t > [\lambda T]$, где $\overline{\Delta y_{(2)}}$ – среднее Δy_t по второй части выборки при $t > [\lambda T]$. Обозначим t -статистику для тестирования коэффициента $\bar{\alpha}(\lambda)$ как $\overline{ADF}_G^f(\lambda)$. Тогда *последовательная* тестовая статистика принимает вид

$$\overline{ADF}_G^{f,\text{inf}} = \inf_{\lambda \in \Lambda} \overline{ADF}_G^f(\lambda).$$

Когда нас интересует тестирование гипотезы единичного корня против альтернативы об изменении инерционности в направлении $I(0) \rightarrow I(1)$, все тесты выше применяются к обращенным во времени данным $y_t^r = y_{T-t+1}$, и доля даты сдвига λ^0 для обращенных во времени данных становится $(1 - \lambda^0)$. Полученные обратные тесты обозначаются как $ADF_G^{r,\text{inf}}$ и $\overline{ADF}_G^{r,\text{inf}}$.

Авторы устанавливают, что соответствующие рекурсивные и последовательные тесты имеют одинаковое асимптотическое распределение. Также маргинальные предельные распределения обратных тестов с долей даты сдвига λ эквивалентны маргинальным предельным распределениям соответствующих прямых тестов с долей даты сдвига $(1 - \lambda)$. Следовательно, прямой и обратный тесты, основанные на инфимуме по λ , имеют идентичные маргинальные распределения. При "правильной" альтернативе соответствующий тест состоятелен со скоростью $T^{1/2}$, в то время как при "неправильной" альтернативе нет. Также мощность прямых тестов будет увеличиваться при увеличении λ^0 (поскольку $I(0)$ часть будет иметь большую пропорцию в выборке). По той же причине мощность обратных тестов будет увеличиваться при увеличении $(1 - \lambda^0)$. Также оценка доли даты сдвига, обеспечивающая минимум тестовой статистики, будет состоятельной (условно на первом наблюдении вследствие GLS-детрендрования; безусловная состоятельность будет выполняться для аналогичных тестов, основанных на OLS-детрендровании или тестов (Elliott, 1999)) при «правильной» альтернативе.

Отметим, что тесты на единичный окрень по всей выборки не будут состоятельными, так как они в построении используют часть нестационарной выборки, которая доминирует стационарную часть.

Поскольку каждый из тестов состоятелен только при "правильной" альтернативе, предлагается брать минимум из прямой и обратной статистик. Доля даты сдвига выбирается тогда на основе той статистики, которая является минимальной.

В (Kurozumi, 2005) предлагается несколько иной подход, также основанный на тестах на единичный окрень. Автор разрабатывает LM-тесты (обобщения работ (Schmidt & Phillips, б.д.) и (Oya & Toda, 1998)) и GLS-тесты для тестирования изменения инерционности; последние тесты отличаются от рассмотренных ранее GLS-тестов в (Leybourne, et al., 2003). Курозуми предлагает использовать регрессию

$$\Delta \tilde{u}_t = \alpha_1 D_t(\lambda) \tilde{u}_{t-1} + \alpha_2 (1 - D_t(\lambda)) \tilde{u}_{t-1} + \sum_{j=1}^{k-1} \bar{\phi}_j(\lambda) \Delta \tilde{u}_{t-j} + e_{t,k}, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (23)$$

где $D_t(\lambda)$ определяется, как и ранее. Тогда LM-статистика будет равна сумме t -статистик для проверки $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 0$. В этой регрессии для LM-тестов $\tilde{u}_t = y_t - y_0 - \tilde{\mu}_t$, $\tilde{\mu}_t = T^{-1} \sum_{i=1}^T \Delta y_i$, в случае наличия тренда, и $\tilde{u}_t = y_t - y_0$ в случае отсутствия тренда. Для GLS-тестов \tilde{u} строятся аналогично ERS и (Leybourne, et al., 2003), только параметры нецентральности для каждой из подвыборок выбираются так, чтобы мощность при каждой из альтернатив (H_{01} и H_{10}) при этих параметрах касалась огибающей мощности в 50%. Параметры нецентральности очевидно зависят от местоположения сдвига, так же как и критические значения. Автор дополнительно предлагает "центрированные" версии статистик, которые строятся точно также, за исключением того, что в регрессию (23) добавляются константы $c_1 D_t(\lambda)$ и $c_2 (1 - D_t(\lambda))$. Эти центрированные версии тестов приводят к более высокой мощности. Если дата сдвига неизвестна, автор предлагает использовать инфимум суммы двух статистик, а также среднюю и экспоненциальную версию статистик (основанных на сумме квадратов t -статистик). На основе симуляций Курозуми получает, что LM-тесты имеют лучшие свойства, чем GLS-тесты, однако, отмечает, что это может быть связано с выбором параметров нецентральности для GLS-детрендрования, и иной выбор этих параметров может привести к лучшим свойствам. Автор рекомендует для данных без тренда использовать экспоненциальную центрированную версию LM-теста, а для данных с трендом экспоненциальную и среднюю центрированные LM-статистики и тест (Leybourne, et al., 2003).

В (Skrobotov, 2015) обобщается подход (Jansson & Nielsen, 2012) на случай изменения инерционности. Если рассмотреть общий случай с наличием детерминированной компоненты ($\beta' d_t$, где $d_t = 1$ для случая только константы или $d_t = (1, t)'$ для случая линейного тренда, β - неизвестный параметр) и слабой зависимости ошибок, то с точностью до константы логарифмическая функция правдоподобия будет иметь вид

$$L^d(\rho_1, \rho_2, \lambda, \beta; \sigma^2, \phi) = -\frac{T}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} (Y_{\rho_1, \rho_2, \phi} - D_{\rho_1, \rho_2, \phi} \beta)' (Y_{\rho_1, \rho_2, \phi} - D_{\rho_1, \rho_2, \phi} \beta), \quad (24)$$

где $\rho_1 = \alpha_1 + 1$ и $\rho_2 = \alpha_2 + 1$ в регрессии (24). Также $y_0 = \dots = y_{-k} = 0$ и $d_0 = \dots = d_{-k} = 0$, k - степень полинома $\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_k L^k$, аппроксимирующая стационарный линейный процесс ошибок. Матрицы $Y_{\rho_1, \rho_2, \phi}$ и $D_{\rho_1, \rho_2, \phi}$ задаются как $(1 - \rho_1 D_1 L - \rho_2 D_2 L) \phi(L) y_t$ и $(1 - \rho_1 D_1 L - \rho_2 D_2 L) \phi(L) d_t'$, соответственно. Тогда статистика отношения правдоподобий будет иметь вид

$$LR(\lambda) = \max_{\bar{\rho}_1 \leq 1, \bar{\rho}_2 \leq 1, \beta} L^d(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \lambda, \beta; \hat{\sigma}^2, \hat{\phi}^2) - \max_{\beta} L^d(1, 1, \lambda, \beta; \hat{\sigma}^2, \hat{\phi}^2)$$

$$= \max_{\bar{\rho}_1 \leq 1, \bar{\rho}_2 \leq 1} L^d(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \lambda; \hat{\sigma}^2, \hat{\phi}^2) - L^d(1, 1, \lambda; \hat{\sigma}^2, \hat{\phi}^2) \quad (25)$$

где $\hat{\sigma}^2$ и $\hat{\phi}$ являются оценками для σ^2 и $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_k)'$, соответственно, а

$$L^d(\rho_1, \rho_2, \lambda; \sigma^2, \phi^2) = -\frac{T}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} Y'_{\rho_1, \rho_2, \phi} Y_{\rho_1, \rho_2, \phi} + \frac{1}{2\sigma^2} (Y'_{\rho_1, \rho_2, \phi} D_{\rho_1, \rho_2, \phi}) (D'_{\rho_1, \rho_2, \phi} D_{\rho_1, \rho_2, \phi})^{-1} (D'_{\rho_1, \rho_2, \phi} Y_{\rho_1, \rho_2, \phi}) \quad (26)$$

является профилем функции логарифма правдоподобия, полученной при максимизации $L^d(\rho_1, \rho_2, \lambda, \beta; \sigma^2, \phi^2)$ относительно мешающего параметра β , связанного с детерминированной компонентой. После подстановки состоятельных оценок $\hat{\sigma}^2$ и $\hat{\phi}$ в (25), статистика $LR(\lambda)$ максимизируется только относительно параметров ρ_1 и ρ_2 , хотя явного решения для данной задачи не существует. В качестве состоятельных оценок для σ^2 и ϕ используются $\hat{\sigma}^2 = (T - p - 1)^{-1} \sum_{t=p+1}^T (\Delta y_t - \hat{\kappa}' Z_t)^2$ и $\hat{\phi} = (0, I_k) \hat{\kappa}$, где $\hat{\kappa}$ - вектор OLS-оценок в регрессии Δy_t на $Z_t = (\Delta d_t', \Delta y_{t-1}, \dots, \Delta y_{t-p})'$, как в (Jansson & Nielsen, 2012).

Предельное распределение, полученное в (Skrobotov, 2015), показывает, что если $d_t = 1$, то предельное распределение $LR(\lambda)$ совпадает с полученным в случае отсутствия детерминированной компоненты.

Для вычисления тестовой статистики $LR(\lambda)$ требуется спецификация порядка запаздываний k , чтобы получить вектор оценок $\hat{\phi}$. Одним из способов такой спецификации является такой выбор k , который минимизирует значение некоторого информационного критерия, например AIC или BIC, в регрессии

$$\Delta y_t = \alpha_1 D_1 y_{t-1} + \alpha_2 D_2 y_{t-1} + \sum_{j=1}^k \phi_j \Delta y_{t-j} + e_{t,k}. \quad (27)$$

Однако использование обычных критериев AIC и BIC при наличии отрицательно автокоррелированного MA процесса в ошибках приводит к занижению необходимого числа запаздывающих разностей и, следовательно, к слишком частому отвержению нулевой гипотезы в этом случае. В (Ng & Perron, 2001) предлагается вводить дополнительную компоненту в функцию штрафа, которая отражает расстояние от нулевой гипотезы о наличии единичного корня. Тогда модифицированный информационный критерий принимает вид:

$$MIC(k) = \ln(\hat{\sigma}_k^2) + \frac{C_T(\tau_T(k) + k + p + 2)}{T - k_{\max}}, \quad (28)$$

где $\hat{\sigma}_k^2$ - сумма квадратов остатков в регрессии, полученной при использовании k лагов, p - размерность детерминированной компоненты, k_{\max} - максимальное рассматриваемое k , $C_T = 2$ для MAIC и $C_T = \ln(T - k_{\max})$ для MBIC, $\tau_T(k)$ - дополнительная компонента, зависящая от выборки (полагая $\tau_T(k) = 0$, мы получаем обычные информационные критерии AIC и BIC).

Для модели с изменением инерционности $\tau_T(k)$ будет строиться как

$$\tau_T(k) = \frac{1}{\hat{\sigma}_k^2} \left(\hat{\alpha}_1^2 \sum_{t=k_{\max}+1}^{[kT]} y_{t-1}^2 + \hat{\alpha}_2^2 \sum_{t=[kT]+1}^T y_{t-1}^2 \right). \quad (29)$$

Данный вид $\tau_T(k)$ очень похож на полученный в (Ng & Perron, 2001) и следует из ортогональности регрессоров $D_1 y_{t-1}$ и $D_2 y_{t-1}$ и их асимптотической ортогональности с регрессорами $\{\Delta y_{t-j}\}_{j=1}^k$ при нулевой гипотезе.

Если истинная дата сдвига $[\lambda T]$ неизвестна, аналогично (Kurozumi, 2005) используются супремум, средняя и экспоненциальная статистики.

Симуляции в (Skrobotov, 2015) показали, что LR-тесты превосходят существующие тесты на $I(1)$ против альтернативы об изменении инерционности. Если направление изменения и дата сдвига неизвестны, то самым робастным тестом является экспоненциальная версия LR-статистики, которая показывает достаточно высокую мощность по сравнению с эффективными тестами в каждом из случаев направления изменения.

5. Возможное наличие нескольких сдвигов в инерционности

Процедуры, рассмотренные в предыдущих разделах, предполагали наличие только одного сдвига в инерционности, либо $I(0) \rightarrow I(1)$, либо $I(1) \rightarrow I(0)$. Однако может существовать множество политических или экономических факторов, которые могут влиять на процесс порождения данных, так что он может иметь более одного сдвига в инерционности. В общем случае тесты на единственный сдвиг в инерционности не будут состоятельными против процессов, которые имеют несколько сдвигов в инерционности. Кроме того, при наличии нескольких сдвигов невозможно состоятельно разбить временной ряд на два отдельных режима, $I(0)$ и $I(1)$. В (Leybourne, et al., 2007) была рассмотрена данная проблема. Пусть процесс порождения данных имеет вид

$$y_t = d_t + u_t, \quad (30)$$

$$u_t = \alpha_i u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (31)$$

где d_t снова является детерминированной компонентой, а процесс u_t является изменяющимся во времени $AR(1)$ процессом.⁸ Нулевая гипотеза H_0 заключается в том, что $\alpha_i = 1$ во всей выборке, то есть y_t является всюду $I(1)$ процессом. При альтернативе y_t имеет один или более сдвигов между $I(0)$ и $I(1)$. Количество сдвигов (равное m) предполагается неизвестным и не зависит от объема выборки T . Можно специфицировать (30) для i -го режима как

$$u_t = u_{\lambda_{i-1}T} + h_t,$$

$$h_t = \alpha_i h_{t-1} + \varepsilon_t,$$

$$h_{\lambda_{i-1}T} = 0$$

для $t = [\lambda_{i-1}T] + 1, [\lambda_{i-1}T] + 2, \dots, [\lambda_i T]$, где λ_i обозначает доля даты сдвига i -го сдвига, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m < 1$.

В (Leybourne, et al., 2007) обобщается тест (Leybourne, et al., 2003) следующим образом. Пусть $\lambda \in (\tau, 1]$ для заданного $\tau \in (0, 1)$. Тестовая процедура (при предположении сдвига в направлении $I(0) \rightarrow I(1)$) основана на статистике

$$M^f(\tau) = \inf_{\lambda \in (\tau, 1]} ADF_G^f(\tau, \lambda), \quad (32)$$

⁸ В (Leybourne, et al., 2007) также рассматривается случай $AR(k)$ ошибок с изменяющимися во времени параметрами и с возможным наличием структурных сдвигов в тренде в неизвестное время.

где $ADF_G^f(\tau, \lambda)$ – статистика ERS ($ADF - GLS$) по выборке между наблюдениями τT и λT . Эта тестовая статистика определяет единственный сдвиг в инерционности $I(0) \rightarrow I(1)$ в момент времени λT . Оценка доли даты сдвига $\hat{\lambda}_s$ основана на минимуме статистики $M^f(\tau_0)$, где $\tau_0 \in [t^{-1}, 2T^{-1})$. Если направление сдвига обратное (то есть $I(1) \rightarrow I(0)$), то используется обратная статистика

$$M^r(\tau) = \inf_{\lambda \in (\tau, 1]} ADF_G^r(\tau, \lambda), \quad (33)$$

где $ADF_G^r(\tau_0, \lambda)$ строится по обращенным во времени данным, $y_t^r = y_{T-t+1}$. Полученная на основе статистики $M^r(\tau_0)$ оценка доли даты сдвига определяется как $\tilde{\lambda}_s$.

Пусть теперь y_t сначала является $I(1)$, затем изменяется и становится $I(0)$ в момент времени $\lambda_1 T$, а после снова возвращается к $I(1)$ в момент времени $\lambda_2 T$ ($I(1) \rightarrow I(0) \rightarrow I(1)$). Начальный $I(1)$ режим не допускает, чтобы прямая статистика $M^f(\tau_0)$ расходилась к бесконечности, а конечный $I(1)$ режим делает то же самое относительно обратной статистики $M^r(\tau_0)$. Следовательно, оценки долей дат сдвигов также будут несостоятельными. Однако $ADF_G^f(\tau, \lambda)$ будет расходиться для $\lambda_1 \leq \tau < \lambda_2$ и $\lambda < \lambda_2$, но не будет расходиться в противном случае, поскольку содержит пропорцию $I(1)$ наблюдений. При росте пропорции $I(0)$ наблюдений эта статистика будет уменьшаться. Это подразумевает, что статистика, которая минимизирует двойную рекурсивную последовательность $\{ADF_G^f(\tau, \lambda), \tau \in (0, 1), \lambda \in (\tau, 1]\}$ по τ и λ ,

$$M = \inf_{\tau \in (0, 1)} M(\tau) = \inf_{\tau \in (0, 1)} \inf_{\lambda \in (\tau, 1]} ADF_G^f(\tau, \lambda), \quad (34)$$

будет асимптотически равна $ADF_G^f(\lambda_1, \lambda_2)$, что дает состоятельные оценки $\hat{\lambda}_1$ и $\hat{\lambda}_2$ для начальной и конечной дат $I(0)$ режима. Отметим, что статистика M в (28) будет обоснована и в случае единственного сдвига в инерционности, давая одну из оценок, $\hat{\lambda}_1$ и $\hat{\lambda}_2$ равной нулю.

В случае большего количества сдвигов статистика M будет асимптотически равна $ADF_G^f(\lambda_{i-1}, \lambda_i)$, выявляя самый выраженный $I(0)$ режим. Эта статистика будет возрастающей функцией от $\lambda_{i-1} - \lambda_i$ и убывающей от соответствующего доминирующего корня $\alpha_i (< 1)$ в каждом взятом $I(0)$ режиме. Для обнаружения следующего $I(0)$ режима поиск производится по оставшимся наблюдениям, исключая период $[\lambda_{i-1}, \lambda_i]$. Данная процедура будет состоятельно разбивать выборку на отдельные $I(0)$ и $I(1)$ режимы. Для численной реализации процедуры авторы рекомендуют использовать $\lambda \geq \tau + 0.2$ (то есть между сдвигами в инерционности предполагается самое меньшее $0.2T$ наблюдений).

В (Chen & Tian, 2012) также предполагается возможное наличие нескольких сдвигов в инерционности, но тестовые статистики строятся на основе тестов на стационарность. Выбирается некоторое окно $h \in (0, 1/2)$ от выборки (то есть предполагается, что имеется самое меньшее hT наблюдений между двумя сдвигами в инерционности), а затем строится статистика $K(\hat{\lambda}, h)$, равная статистике (8), в которой числитель вычисляется на основе выборки $t = \lambda T + 1, \dots, \lambda T + hT$, а знаменатель на основе выборки $t = \lambda T - hT + 1, \dots, \lambda T$.

.Авторы предлагают следующую процедуру: на первом шаге статистика $K(\hat{\lambda}, h)$ максимизируется по множеству $A_1 = [h, 1-h]$, и если максимум больше критического значения, то мы определяем сдвиг $I(0) \rightarrow I(1)$ и соответствующую дату этого сдвига $\hat{\lambda}_1$. Затем статистика $K(\hat{\lambda}, h)$ минимизируется по множеству $B_1 = A_1 - (\hat{\lambda}_1 - h, \hat{\lambda}_1 + h)$, и если минимум меньше критического значения, то мы определяем сдвиг $I(1) \rightarrow I(0)$ и соответствующую дату этого сдвига $\tilde{\lambda}_1$. В противном случае имеется только один сдвиг в инерционности, $I(0) \rightarrow I(1)$. На втором шаге максимизация производится по множеству $A_2 = B_1 - (\tilde{\lambda}_1 - h, \tilde{\lambda}_1 + h)$, получая оценку доли даты сдвига $\hat{\lambda}_2$, а затем минимизация по множеству $B_2 = A_2 - (\hat{\lambda}_2 - h, \hat{\lambda}_2 + h)$. Процедура повторяется до тех пор, пока нельзя будет обнаружить сдвиг в инерционности. В случае тяжелых хвостов распределения ошибок (строго говоря, ошибки являются строго стационарной симметричной последовательностью в области притяжения устойчивого закона с показателем тяжести хвостов $\kappa \in (1, 2)$ и нулевым математическим ожиданием; для гауссовских ошибок $\kappa = 2$) в (Chen, et al., 2012) было установлено, что предельное распределение статистики $K(\hat{\lambda}, h)$ будет зависеть от хвостового индекса κ . Для решения этой проблемы авторы предлагают использовать обычный (непараметрический) остаточный *i.i.d*-бутстреп на основе центрированных остатков по всей выборке (см., однако, (Yang & Jin, 2014), где используется иное получения бутстреповских рядов).

В (Kejriwal, et al., 2013) предлагаются супремумы от F -тестов для тестирования нулевой гипотезы $I(1)$ против альтернативы о нескольких сдвигах в инерционности. Авторы рассматривают достаточно общую модель, в которой предполагается изменение инерционности не только между $I(0)$ и $I(1)$, но также и изменение инерционности в краткосрочном плане. Другими словами, при альтернативе предполагается, что $\varepsilon_t = \varepsilon_{it}$ для каждого режима i в (30). Кроме этого предполагается возможные изменения в уровнях и/или наклоне тренда в каждый момент переключения $I(1) \rightarrow I(0)$ или наоборот.

Пусть максимально возможное число сдвигов равно m^* . Тогда авторы предлагают две статистики,

$$UDmax_a(m^*) = \max_{1 \leq m \leq m^*} \sup_{\lambda \in \Lambda} F_a(\lambda, m), \quad (35)$$

$$UDmax_b(m^*) = \max_{1 \leq m \leq m^*} \sup_{\lambda \in \Lambda} F_b(\lambda, m), \quad (36)$$

где $UDmax_a(m^*)$ – статистика для проверки нулевой гипотезы, когда первый режим является $I(1)$, $UDmax_b(m^*)$ – статистика для проверки нулевой гипотезы, когда первый режим является $I(0)$, а $F_a(\lambda, m)$ и $F_b(\lambda, m)$ – статистики Вальда для этих двух моделей при предположении о наличии m сдвигов. Вектор долей дат сдвигов $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ с $\lambda_i = T_i / T$ для всех i . Множество Λ таково, что допускается минимум доля h от выборки между двумя сдвигами.

Для упрощения вычисления можно установить, что $\sup_{\lambda \in \Lambda} F_a(\lambda, m) = F_a(\hat{\lambda}, m)$ и $\sup_{\lambda \in \Lambda} F_b(\lambda, m) = F_b(\hat{\lambda}, m)$, где $\hat{\lambda}$ – оценки долей дат сдвигов, полученных путем минимизации сумм квадратов остатков по всем возможным датам сдвигов, которые можно получить путем реализации алгоритма (Perron & Qu, 2006). Каждый из $\sup F$ -тестов проверяет гипотезу $I(1)$ против альтернативы о наличии m сдвигов, тогда как

$UDmax$ -тесты проверяют гипотезу $I(1)$ против альтернативы о произвольном количестве сдвигов в инерционности. Если порядок интегрированности первого режима неизвестен, то следует использовать статистику $Wmax_1 = \max_{1 \leq m \leq m^*} W(m)$, где $W(k) = \max[\sup F_a(\lambda, k), \sup F_b(\lambda, k)]$.

Для построения теста, который бы проверял нулевую гипотезу о постоянной инерционности ($I(0)$ или $I(1)$), в (Kejriwal, et al., 2013) предлагается сначала проверять гипотезу о стационарности всего ряда (например, тестом KPSS), и при отвержении (что говорит о возможном наличии нестационарных подпериодов) применять предложенные тесты. В (Kejriwal, et al., 2013) также дается указание на то, как отличить $I(0)$ процессы со сдвигами в детерминированной функции от процессов с изменением инерционности без сдвигов в детерминированной функции. Если процесс имеет хотя бы один сдвиг в инерционности, только один из тестов, $UDmax_a(m^*)$ или $UDmax_b(m^*)$, будет состоятельным в зависимости от того, какой порядок интегрированности имеет первый режим. С другой стороны, тесты против любой альтернативы будут состоятельными при $I(0)$ процессе со сдвигами только в уровнях. Для случая со сдвигами в тренде авторы рекомендуют использовать тесты на единичный корень с учетом сдвигов, и если имеются сдвиги в инерционности, эти тесты не будут отвергать гипотезу единичного корня. С другой стороны, процесс может быть $I(1)$ со сдвигами с тренде. В этом случае в (Kejriwal, et al., 2013) предлагается сначала детрендить ряд с учетом этих сдвигов, а затем использовать тесты на изменения инерционности, хотя при нулевой гипотезе предельные распределения этих тестов будут зависеть от дат сдвигов. Если количество сдвигов в тренде отличается от количества сдвигов в инерционности, предлагается использовать последовательную процедуру (Kejriwal & Perron, 2010) для определения количества сдвигов, затем детрендить исходный ряд, и после этого проверять наличие сдвигов в инерционности.

Предложенные в (Kejriwal, et al., 2013) показывают хорошие свойства на конечных выборках и не имеют существенных либеральных искажений размера, как в (Leybourne, et al., 2007). Также тесты (Kejriwal, et al., 2013) достаточно робастны к краткосрочной динамике ошибок: нет необходимости моделировать сдвиги в краткосрочной инерционности, а только ограничиться случаями разделения $I(0)$ и $I(1)$ режимов.

б. Оценивание даты сдвига и построение доверительного интервала

В качестве оценки доли даты сдвига в (Kim, 2000) предлагается максимизировать (в случае $I(0) \rightarrow I(1)$) или минимизировать (в случае $I(1) \rightarrow I(0)$) статистику

$$\Lambda_T(\lambda) = \frac{[(1-\lambda)T]^{-2} \sum_{t=[\lambda T]+1}^T \hat{u}_{1,t}^2}{[\lambda T]^{-1} \sum_{t=1}^{[\lambda T]} \hat{u}_{0,t}^2}.$$

В (Busetti & Taylor, 2004) предлагается аналогичная статистика, за исключением того, что $\Lambda_T(\lambda)$ дополнительно делится на λT . Таким образом, эти два подхода в общем случае не приводят к одной и той же оценке доли даты сдвига. При некоторых дополнительных условиях (см. (Kim, 2000), Assumption 2) автор доказывает, что оценка доли даты сдвига при альтернативной гипотезе является суперсостоятельной (то есть $O_p(T^{-1})$). Однако в

(Halunga & Osborn, 2012) показывается, что полученные таким образом оценки доли даты сдвига не будут состоятельными, а будут сходиться к случайной величине, имеющей асимптотическую верхнюю границу λ^0 , так что каждое из отношений будет асимптотически смещено вниз. Состоятельность будет выполняться только при отсутствии детерминированной компоненты. Причина заключается в том, что доказательство в (Kim, 2000) игнорирует асимптотически непренебрежимое применение коррекции среднего, когда порядок интегрированности меняется. Более конкретно, (например, в случае $I(0) \rightarrow I(1)$) когда $\lambda < \lambda^0$ неверно предполагать, что $\hat{u}_{1,t} = y_t - \bar{y}_1$, где \bar{y}_1 – среднее по второй части выборки, является стационарной последовательностью для $t = \lambda T + 1, \dots, \lambda^0 T$ несмотря на стационарность y_t . Аналогичный комментарий применяется в случае $\lambda > \lambda^0$: стационарность не выполняется для $\hat{u}_{0,t} = y_t - \bar{y}_0$, где \bar{y}_0 – среднее по первой части выборки, для $t = \lambda^0 T + 1, \dots, \lambda T$, поскольку $I(1)$ наблюдения входят в \bar{y}_0 . Кроме смещения вниз оценки доли даты сдвига возникает и смещение вверх вследствие бимодальности распределений. Для оценки (Buseti & Taylor, 2004) последний эффект более сильный, чем для оценки (Kim, 2000). Авторы отмечают, что потеря состоятельности не относится к оценке доли даты сдвига, предложенной в (Leybourne, et al., 2007), которая равна $\arg \inf_{\lambda \in \Lambda} K^f(\lambda)$ при H_{01} и $\arg \inf_{\lambda \in \Lambda} K^r(\lambda)$ при H_{10} , где $K^f(\lambda)$ и $K^r(\lambda)$ строятся согласно (14) и (15), соответственно. В (Kruse, 2013) утверждается, что несостоятельность этих оценок не является большой проблемой для прогнозирования.

В (Kejriwal & Perron, 2012) обсуждается проблема, возникшая в (Chong, 2001) при оценивании даты сдвига. Определим $SSR(\lambda)$ как

$$SSR(\lambda) = \sum_{t=2}^{[\lambda T]} [y_t - \hat{\mu}_1 - \hat{\alpha}_1(\lambda)y_{t-1}]^2 + \sum_{t=[\lambda T]+1}^T [y_t - \hat{\mu}_2 - \hat{\alpha}_2(\lambda)y_{t-1}]^2, \quad (37)$$

где $\hat{\alpha}_1(\lambda)$ и $\hat{\alpha}_2(\lambda)$ – OLS-оценки авторегрессионных коэффициентов по первой и второй частям выборки, соответственно, а $\hat{\mu}_1$ и $\hat{\mu}_2$ – оцененные константы по первой и второй частям выборки. Оценка доли даты сдвига $\hat{\lambda}$ определяется тогда как $\hat{\lambda} = \arg \inf_{\lambda \in \Lambda} SSR(\lambda)$. В (Chong, 2001) устанавливается, что при DGP (2) эта оценка является суперсостоятельной ($O_p(T^{-1})$). Однако, если рассматривать DGP при альтернативе как в (3) без дополнительного слагаемого $u_{\lambda T,1}$, то $\hat{\lambda}$ будет сходиться намного быстрее, чем в случае $I(0) \rightarrow I(1)$ из-за ложного скачка в дату сдвига. Рассматривая DGP $I(1) \rightarrow I(0)$ точно также, как в (3), в (Kejriwal & Perron, 2012) было установлено, что оценка доли даты сдвига будет сходиться с той же самой скоростью, как и в случае $I(0) \rightarrow I(1)$.⁹ То есть в обоих случаях скорость сходимости будет одинаковой, что позволяет построить доверительные интервалы. В случае произвольного количества сдвигов принцип нахождения оценок дат сдвигов тот же самый, минимизируя сумму квадратов остатков по всем возможным датам сдвигов с помощью алгоритма (Perron & Qu, 2006) (см. (Kejriwal, et al., 2013)).

Для построения доверительного интервала в (Chong, 2001) использовалась структура сокращающегося сдвига (shrinking break), в которой величина сдвига сходится к нулю с достаточно низкой скоростью, чтобы все еще сохранить состоятельность оценки.

⁹ Отметим, что такая скорость сходимости достаточна для того, чтобы авторегрессионные оценки $\hat{\alpha}_1(\hat{\lambda})$ и $\hat{\alpha}_2(\hat{\lambda})$ имели те же самые предельные распределения, что и в случае известной даты сдвига.

Другими словами, $\alpha_T = 1 - [\sqrt{Tg(T)}]^{-1}$, где $g(T) > 0$, $g(T) \rightarrow \infty$, $g(T)/\sqrt{T} \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$. Доверительный интервал строится на основе Теоремы 4 в (Chong, 2001), в которой утверждается, что $(1 - \alpha_T)^2 T^2 (\hat{\lambda} - \lambda^0) = O_p(1)$. Поскольку это предельное распределение симметрично, доля даты сдвига, скажем, λ_c , включается в $(100(1 - \xi)\%)$ доверительный интервал, если $|(1 - \alpha_T)^2 T^2 (\hat{\lambda} - \lambda_c)| \leq cv(1 - \xi/2)$, где $cv(1 - \xi/2)$ – квантиль уровня $(1 - \xi/2)$ предельного распределения $(1 - \alpha_T)^2 T^2 (\hat{\lambda} - \lambda^0)$. Поскольку доля даты сдвига является $O_p(T^{-1})$, при фиксированной величине сдвига $|(1 - \alpha_T)^2 T^2 (\hat{\lambda} - \lambda_c)| = O_p(T)$, что расходится для всех $\lambda^0 \in \Lambda$. Следовательно, доверительный интервал будет иметь нулевую асимптотическую норму покрытия.

Можно также использовать процедуры бутстрепа для построения доверительных интервалов, как в (Kejriwal, 2012). После оценивания доли даты сдвига строится бутстреповская выборка, учитывающая два режима. Кейривал использует три варианта построения интервалов, первый использует обычные OLS-оценки для порождения бутстреповских выборок, второй основан на скорректированных на смещение оценках, как в (Andrews & Chen, 1994), а третий основан на оценках, на которые накладывается ограничение с единичным корнем в соответствующем режиме.

7. Эмпирический анализ качественных свойств различных подходов к прогнозированию российских индексов цен

В данном разделе мы проведем эмпирический анализ российских индексов цен. В Разделе 7.1 описаны используемые данные, а также приведены результаты тестирования смены инерционности для этих временных рядов. В Разделе 7.2 изложены результаты эмпирического исследования. В частности, приведены сведения относительно преимущества при построении прогнозов, которое можно получить при использовании теста на смену инерционности. Кроме того, для всех рассматриваемых временных рядов приведены наилучшие прогнозные модели для каждого горизонта прогнозирования, двух выборок, а также с учетом результатов теста на изменение инерционности и без.

7.1. Данные и их статистические свойства

В этом разделе описаны использованные в исследовании данные. Мы рассмотрим временные ряды, связанные с индексами потребительских цен и индексами промышленного производства. Полный список рядов представлен в Таблице 1.

Таблица 1 – Список временных рядов

Временной ряд	Период
ИПЦ	Январь 1999 – Сентябрь 2014
ИПЦ, продовольственные товары	Январь 1999 – Сентябрь 2014
Продукты питания	Январь 1999 – Сентябрь 2014
Алкогольные напитки	Январь 1999 – Сентябрь 2014
Непродовольственные товары	Январь 1999 – Сентябрь 2014
Платные услуги	Январь 1999 – Сентябрь 2014
БИПЦ к предыдущему месяцу	Январь 2003 – Сентябрь 2014
Стоимость и изменение стоимости минимального набора продуктов питания (в % к предыдущему месяцу)	Январь 2000 – Сентябрь 2014
Стоимость фиксированного набора потребительских товаров и услуг (в % к предыдущему месяцу)	Февраль 2002 – Сентябрь 2014
Индексы цен производителей промышленных товаров	Январь 1999 – Сентябрь 2014
Добыча полезных ископаемых	Январь 1999 – Сентябрь 2014
Обрабатывающие производства	Январь 1999 – Сентябрь 2014
Производство пищевых продуктов	Январь 1999 – Сентябрь 2014
Текстильное и швейное производство	Январь 1999 – Сентябрь 2014
Обработка древесины и производство изделий из дерева	Январь 1999 – Сентябрь 2014
Целлюлозно-бумажное производство	Январь 1999 – Сентябрь 2014
Производство кокса, нефтепродуктов	Январь 1999 – Сентябрь 2014
Химическое производство	Январь 1999 – Сентябрь 2014
Металлургическое производство и производство готовых металлических изделий	Январь 1999 – Сентябрь 2014
Производство машин и оборудования	Январь 1999 – Сентябрь 2014
Производство транспортных средств и оборудования	Январь 1999 – Сентябрь 2014
Производство и распределение электроэнергии, газа и воды	Январь 1999 – Сентябрь 2014

В качестве предварительного анализа данных были приведены тесты на изменение инерционности временных рядов. Поскольку при тестировании стационарности/нестационарности временных рядов величина начального значения (инициализация) может исказить результаты тестов, мы рассмотрим два периода: первый с включением всего 1999 года, второй – начиная с января 2000 года. Для тестирования мы применяем подход, основанный на (Kejriwal, et al., 2013). Сначала временной ряд проверяется на стационарность скорректированным на смещение тестом KPSS (Kurozumi & Tanaka, 2010). Если гипотеза о стационарности не отвергается, далее мы предполагаем, что ряд является $I(0)$. Если гипотеза отвергается, это означает, что либо весь ряд, либо его часть являются $I(1)$, так что возможны два варианта: весь ряд является $I(1)$; либо происходит изменение инерционности ряда в определенный момент времени. Тогда мы можем тестировать гипотезу о том, что ряд является $I(1)$ против альтернативы об изменении инерционности. Отметим, что тесты для проверки такой гипотезы имеют мощность и при альтернативе, что весь ряд является $I(0)$, поэтому предварительная проверка гипотезы о стационарности необходима, чтобы исключить такую возможность. В качестве тестов на $I(1)$ против альтернативы об изменении инерционности мы

используем статистику $W(1)$ (Kejriwal, et al., 2013), три LM-статистики (Kurozumi, 2005), инфимум $inf-LM_d$, среднюю $avg-LM_d$ и экспоненциальную $exp-LM_d$, а также три LR-статистики (Skrobotov, 2015), супремум $sup-LR$, среднюю $avg-LR$ и экспоненциальную $exp-LR$. Результаты приведены в Таблицах 2-5. Если хотя бы один из тестов отвергает нулевую гипотезу об $I(1)$, мы отвергаем эту гипотезу¹⁰.

Анализ прогнозов индексов цен

На основании первичного анализа данных, методика которого была описана в Разделе 7.1, были получены результаты тестирования российских индексов цен на смену инерционности. Результаты приведены в Таблице 6.

¹⁰ Несмотря на то что при таком подходе размер процедуры увеличивается, хотя бы один из тестов отвергает гипотезу на очень малом уровне значимости, поэтому даже если мы будем использовать шкалирование критических значений для контроля размера, итоговые результаты не изменятся.

Таблица 2 - Результаты тестов для сезонно скорректированных данных с 2000 г.

	KPSS	W(1)	sup-LR	avg-LR	exp-LR	inf-LM _d	avg-LM _d	exp-LM _d
ИПЦ	0.57**	5.23	1.84	0.97	1.03	-3.63	9.89*	11.81
ИПЦ на продовольственные товары	0.28	7.85***	6.24***	4.96***	5.42***	-5.28***	20.26***	21.96***
ИПЦ на продукты питания	0.26	9.17***	6.2***	5.55***	5.58***	-5***	20.76***	22.35***
ИПЦ на алкогольные напитки	0.53**	8.67*	0.59	-12.92	-0.18	-8.49***	25.15***	38.07***
ИПЦ на непродовольственные товары	1.27***	6.78	0.08	0.02	0.02	-5.19	14.37**	22**
ИПЦ на платные услуги	0.71**	2.79	2.36	0.23	0.45	-1.73	3.86	13.05
БИПЦ к предыдущему месяцу	0.77***	5.77	5.47*	3.69**	4.04**	-2.93	11.56**	17.9**
Стоимость и изменение стоимости минимального набора продуктов питания (в % к предыдущему месяцу)	0.12	11***	11.85***	9.52***	10.2***	-7.38***	54.29***	58.31***
Стоимость фиксированного набора потребительских товаров и услуг (в % к предыдущему месяцу)	0.48**	5.08	11.21***	7.68***	9.01***	-2.36	28.48***	41.37***
Индексы цен производителей промышленных товаров	0.4*	24.43***	25.6***	19.01***	21.52***	-10.17***	54.09***	71.69***
Добыча полезных ископаемых	0.15	35.01***	30.48***	26.37***	27.16***	-12.1***	78.01***	91.04***
Обрабатывающие производства	0.33	20.28***	21.03***	14.51***	16.52***	-8.15***	42.68***	57.94***
Производство пищевых продуктов	0.17	11.95***	9.05***	8.79***	8.81***	-6.09***	24.12***	25.7***
Текстильное и швейное производство	0.24	7.75***	8.32***	5.25***	6.03***	-7.38***	22.15***	26.65***
Обработка древесины и производство изделий из дерева	0.52**	9.54**	2.68	1.84	1.91	-7.49***	17.6***	26.15***
Целлюлозно-бумажное производство	0.18	6.29***	0.78***	0.3***	0.34***	-7.1***	24.57***	28.42***
Производство кокса, нефтепродуктов	0.08	18.72***	33.16***	29.95***	30.4***	-10.85***	91.22***	101.23***
Химическое производство	0.13	16.26***	20.57***	15.76***	16.61***	-8.59***	46.3***	54.89***
Металлургическое производство и производство готовых металлических изделий	0.22	19.01***	15.55***	13.06***	13.18***	-8.03***	39.59***	42.24***
Производство машин и оборудования	0.87***	12.29***	0.46	0.08	0.08	-7.33***	26.91***	51.83***
Производство транспортных средств и оборудования	0.9***	6.04	1.48	0.78	0.86	-6.77**	24.5***	32.17***
Производство и распределение электроэнергии, газа и воды	0.62**	7.64	0.26	0.01	0.01	-4.03	13.34**	168.93***

Таблица 3 - Результаты тестов для сезонно нескорректированных данных с 2000 г.

	KPSS	W(1)	sup-LR	avg-LR	exp-LR	inf-LM _d	avg-LM _d	exp-LM _d
ИПЦ	0.48**	6.44	2.04	0.52	0.67	-2.54	5.6	9.24
ИПЦ на продовольственные товары	0.25	4.12***	17.59***	17.12***	17.16***	-9.1***	45.91***	46.41***
ИПЦ на продукты питания	0.23	4.44***	17.82***	8.26***	16.38***	-8.96***	43.33***	44.81***
ИПЦ на алкогольные напитки	0.59**	4.35	0.83	0.25	0.26	-22.57***	113.45***	272.85***
ИПЦ на непродовольственные товары	1.15***	7.61	0.12	0.01	0.01	-5.37	14.31**	20.04**
ИПЦ на платные услуги	0.68**	4.21	3.68	0.36	1.03	-0.94	2.96	12.91
БИПЦ к предыдущему месяцу	0.53**	5.6	3.75	1.49	2.12	-2.43	10.98*	23.11***
Стоимость и изменение стоимости минимального набора продуктов питания (в % к предыдущему месяцу)	0.16	3.51***	18.42***	18.06***	18.09***	-9.28***	45.99***	46.31***
Стоимость фиксированного набора потребительских товаров и услуг (в % к предыдущему месяцу)	0.27	5.59***	1.83***	1.37***	1.4***	-0.89***	21.95***	78.93***
Индексы цен производителей промышленных товаров	0.4*	25.03***	26.23***	19.82***	22.41***	-10.56***	57.04***	75.42***
Добыча полезных ископаемых	0.08	32.75***	30.38***	25.38***	26.98***	-12.05***	73.45***	90.08***
Обрабатывающие производства	0.16	19.19***	22.24***	14.65***	17.63***	-8.35***	43.64***	63.24***
Производство пищевых продуктов	0.17	10.65***	13.69***	12.87***	13.01***	-7.06***	31.13***	32.32***
Текстильное и швейное производство	0.25	11.41***	9.06***	8.01***	8.14***	-7.67***	31.94***	34.48***
Обработка древесины и производство изделий из дерева	0.56**	8.38*	4.75*	2.27*	3.85**	-7.49***	20.11***	39.18***
Целлюлозно-бумажное производство	0.17	7.41***	2.08***	1.49***	1.52***	-7.58***	27.04***	28.49***
Производство кокса, нефтепродуктов	0.07	12***	30.63***	27.47***	27.94***	-10.48***	80.39***	89.19***
Химическое производство	0.13	18.21***	21.99***	16.59***	17.73***	-9.33***	49.59***	61.24***
Металлургическое производство и производство готовых металлических изделий	0.18	17.43***	16.15***	12.49***	12.85***	-8.06***	40***	46.08***
Производство машин и оборудования	0.93***	7.89	0.27	0.03	0.03	-4.78	15.32***	64.45***
Производство транспортных средств и оборудования	0.97***	5.92	1.01	0.38	0.45	-5.95	13.14**	19.2**
Производство и распределение электроэнергии, газа и воды	0.6**	5.59	0.16	0	0	-12.14***	57.46***	99.74***

Таблица 4 - Результаты тестов для сезонно скорректированных данных с 1999 г.

	KPSS	W(1)	sup-LR	avg-LR	exp-LR	inf-LM _d	avg-LM _d	exp-LM _d
ИПЦ	1.81***	7.68	0.11	0.01	0.02	-5.71	19.74***	23.39***
ИПЦ на продовольственные товары	1.08***	8.78*	0.25	0.05	0.06	-6.06	26.82***	107.82***
ИПЦ на продукты питания	0.81***	9.86**	0.27	0.05	0.06	-6.4*	31.15***	36.17***
ИПЦ на алкогольные напитки	1.27***	22.68***	0.13	0.04	0.05	-6.39*	18.23***	18.54**
ИПЦ на непродовольственные товары	5.08***	18.76***	0.03	0	0.01	-6.11*	25.5***	33.14***
ИПЦ на платные услуги	0.86***	6.95	2.41	0.36	0.67	-1.53	4.22	13.32
БИПЦ к предыдущему месяцу	0.53**	5.77	5.47*	3.69**	4.04**	-2.93	11.56**	17.9**
Стоимость и изменение стоимости минимального набора продуктов питания (в % к предыдущему месяцу)	0.16	11***	11.85***	9.52***	10.2***	-7.38***	54.29***	58.31***
Стоимость фиксированного набора потребительских товаров и услуг (в % к предыдущему месяцу)	0.27	5.08***	11.21***	7.68***	9.01***	-2.36***	28.48***	41.37***
Индексы цен производителей промышленных товаров	0.69**	25.85***	23.21***	15.61***	18.85***	-10.07***	53.77***	74.45***
Добыча полезных ископаемых	0.36*	37.6***	31.86***	27.08***	28.04***	-12.25***	79.2***	93.48***
Обрабатывающие производства	0.69**	20.16***	1.25	-0.3	-0.06	-7.93***	43.85***	61.21***
Производство пищевых продуктов	0.87***	7.97	0.15	0.04	0.04	-8.75***	56.18***	56.89***
Текстильное и швейное производство	1.19***	13.32***	0.17	0.03	0.04	-6.44**	17.6***	22.18***
Обработка древесины и производство изделий из дерева	0.62**	7.36	1.28	0.35	0.39	-6.96**	15.56***	20.69**
Целлюлозно-бумажное производство	1.82***	12.58***	0.05	0	0.01	-9.51***	45.26***	46.81***
Производство кокса, нефтепродуктов	0.37*	50.94***	32.8***	28.5***	30.05***	-10.09***	85.83***	99.86***
Химическое производство	0.36*	15.86***	19.11***	15.01***	15.75***	-8.42***	42.76***	53.23***
Металлургическое производство и производство готовых металлических изделий	0.46*	17.57***	10.82***	8.14***	8.26***	-7.61***	35.86***	39.3***
Производство машин и оборудования	1.14***	8.4*	0.3	0.04	0.05	-5.26	14.3**	41.25***
Производство транспортных средств и оборудования	1.37***	4.12	0.14	0.01	0.02	-5.5	17.07***	21.58**
Производство и распределение электроэнергии, газа и воды	0.28	12.07***	3.67***	1.54***	1.66***	-2.73***	8.73***	177.31***

Таблица 5 - Результаты тестов для сезонно нескорректированных данных с 1999 г.

	KPSS	W(1)	sup0LR	avg0LR	exp0LR	inf0LM _d	avg0LM _d	exp0LM _d
ИПЦ	1.63***	6.39	0.08	0.01	0.01	-2.85	14.01**	19.86**
ИПЦ на продовольственные товары	1.13***	5.11	0.15	0.03	0.03	-12.46***	108.22***	109.95***
ИПЦ на продукты питания	0.9***	4.87	0.13	-0.04	0.02	-11.91***	96.74***	97.34***
ИПЦ на алкогольные напитки	1.44***	13.24***	0.21	0.07	0.08	-6.92**	25.63***	29.15***
ИПЦ на непродовольственные товары	4.09***	11.55***	0.11	0.01	0.01	-6.3*	23.4***	26.57***
ИПЦ на платные услуги	0.79***	6.61	2.05	0.38	0.65	-0.7	3.62	12.28
БИПЦ к предыдущему месяцу	0.53**	5.6	3.75	1.49	2.12	-2.43	10.98*	23.11***
Стоимость и изменение стоимости минимального набора продуктов питания (в % к предыдущему месяцу)	0.16	3.51***	18.42***	18.06***	18.09***	-9.28***	45.99***	46.31***
Стоимость фиксированного набора потребительских товаров и услуг (в % к предыдущему месяцу)	0.27	5.59***	1.83***	1.37***	1.4***	-0.89***	21.95***	78.93***
Индексы цен производителей промышленных товаров	0.73**	26.24***	24.06***	16.95***	20.09***	-10.72***	57.82***	78.23***
Добыча полезных ископаемых	0.42*	34.33***	31.87***	26.38***	28.15***	-12.38***	75.9***	93.16***
Обрабатывающие производства	0.09	19.02***	2.73***	0.46***	0.55***	-8.3***	44.8***	67.12***
Производство пищевых продуктов	0.83***	10.26**	0.1	0.04	0.04	-9.99***	69***	70.39***
Текстильное и швейное производство	1.18***	11.54***	0.19	0.04	0.05	-8.58***	18.49***	43.1***
Обработка древесины и производство изделий из дерева	0.69**	6.1	0.51	0.04	0.05	-7.45***	15.21***	24.33***
Целлюлозно-бумажное производство	1.8***	13.01***	0.04	0.01	0.01	-9.34***	44.53***	45.42***
Производство кокса, нефтепродуктов	0.31	44.83***	30.95***	26.74***	28.14***	-9.78***	75.58***	88.23***
Химическое производство	0.34	17.86***	19.62***	17.04***	17.14***	-9.15***	47.26***	59.16***
Металлургическое производство и производство готовых металлических изделий	0.43*	15.97***	11.91***	8.25***	8.55***	-7.96***	38.21***	44.57***
Производство машин и оборудования	0.83***	9.46**	0.24	0.03	0.03	-7.83***	27.97***	47.42***
Производство транспортных средств и оборудования	1.34***	4.64	0.12	0.01	0.01	-5.89	14.13**	19.64**
Производство и распределение электроэнергии, газа и воды	0.28	9.06***	4.54***	1.47***	1.74***	-3.46***	26.18***	106.25***

Таблица 6 – Результаты теста на смену инерционности для российских временных рядов

	С января 1999 по сентябрь 2014				С января 2000 по сентябрь 2014			
	Не скорректированные		Скорректированные		Не скорректированные		Скорректированные	
ИПЦ	фев 2009	I(1)->I(0)	фев 2009	I(1)->I(0)	март 2009	I(1)	фев 2009	I(1)
ИПЦ на продовольственные товары	январь 2002	I(1)->I(0)	июнь 2002	I(0)->I(1)		I(0)		I(0)
ИПЦ на продукты питания	январь 2002	I(1)->I(0)	май 2008	I(0)->I(1)		I(0)		I(0)
ИПЦ на алкогольные напитки	декабрь 2009	I(1)->I(0)	июнь 2011	I(1)->I(0)	декабрь 2009	I(1)->I(0)	декабрь 2002	I(1)->I(0)
ИПЦ на непродовольственные товары	июнь 2009	I(1)->I(0)	январь 2011	I(1)->I(0)	январь 2011	I(1)->I(0)	январь 2011	I(1)->I(0)
ИПЦ на платные услуги		I(1)		I(1)		I(1)		I(1)
БИПЦ к предыдущему месяцу					октябрь 2009	I(0)->I(1)	февраль 2010	I(0)->I(1)
Стоимость и изменение стоимости минимального набора продуктов питания (в % к предыдущему месяцу)						I(0)		I(0)
Стоимость фиксированного набора потребительских товаров и услуг (в % к предыдущему месяцу)						I(0)	декабрь 2008	I(0)->I(1)
Индексы цен производителей промышленных товаров	январь 2009	I(1)->I(0)	декабрь 2008	I(1)->I(0)	январь 2009	I(1)->I(0)	декабрь 2008	I(1)->I(0)
Добыча полезных ископаемых	январь 2009	I(1)->I(0)	январь 2009	I(1)->I(0)		I(0)		I(0)
Обрабатывающие производства		I(0)	декабрь 2008	I(1)->I(0)		I(0)		I(0)
Производство пищевых продуктов	апрель 2004	I(0)->I(1)	апрель 2004	I(0)->I(1)		I(0)		I(0)
Текстильное и швейное производство	апрель 2009	I(0)->I(1)	май 2009	I(0)->I(1)		I(0)		I(0)
Обработка древесины и производство изделий из дерева	май 2011	I(1)->I(0)	июнь 2011	I(1)->I(0)	декабрь 2010	I(1)->I(0)	декабрь 2010	I(1)->I(0)
Целлюлозно-бумажное производство	июнь 2002	I(1)->I(0)	апрель 2011	I(1)->I(0)		I(0)		I(0)
Производство кокса, нефтепродуктов		I(0)	декабрь 2008	I(1)->I(0)		I(0)		I(0)
Химическое производство		I(0)	декабрь 2008	I(1)->I(0)		I(0)		I(0)
Металлургическое производство и производство готовых металлических изделий	январь 2009	I(1)->I(0)	январь 2002	I(0)->I(1)		I(0)		I(0)
Производство машин и оборудования	сентябрь 2008	I(1)->I(0)	август 2008	I(1)->I(0)	сентябрь 2008	I(1)->I(0)	сентябрь 2008	I(1)->I(0)
Производство транспортных средств и оборудования	февраль 2011	I(1)->I(0)	август 2008	I(1)->I(0)	август 2008	I(1)->I(0)	август 2008	I(1)->I(0)
Производство и распределение электроэнергии, газа и воды		I(0)		I(0)	февраль 2004	I(1)->I(0)	февраль 2011	I(1)->I(0)

В Таблице 6 представлены итоговые результаты, какие ряды мы полагаем с постоянной инерционностью, а какие с меняющейся, и соответствующие даты изменения инерционности, вычисленные на основе минимизации сумм квадратов остатков в модели с двумя режимами, как в (Kejriwal & Perron, 2012). Отметим, что в большинстве случаев вне зависимости от того, рассматриваем ли мы сезонно скорректированные или нескорректированные данные, результаты практически не меняются. Если рассматривать выборку начиная с 1999, то на первом шаге гипотеза стационарности отвергается для большинства рядов, что может быть связано с большим начальным значением. С другой стороны, при ограничении выборки с 2000 года для многих рядов стационарность уже не будет отвергаться. Также следует заметить, что на выборке с 1999 года для многих рядов сдвиг в инерционности происходит в разном направлении. Для выборки с 2000 года дата сдвига определяется в большинстве случаев в районе 2000-2009 годов, что может быть связано с кризисом. До момента сдвига ряд определяется $I(1)$, после – $I(0)$.

Анализ применимости LR теста при прогнозировании

В данном разделе описывается методика построения прогнозных моделей для общероссийских индексов цен. Мы оценили большое число довольно простых прогнозных моделей, которые, однако, успели себя хорошо зарекомендовать, среди которых:

- Наивный прогноз.
- Наивный сезонный прогноз.
- Прогноз по ARIMA-модели. Порядок модели определялся на основании минимизации информационного критерия Шварца. Следует заметить, что и порядок модели, и ее коэффициенты переоценивались при добавлении каждой новой точки данных.
- Скользящее среднее. Прогноз строился как среднее арифметическое из значений показателя за последние два года.
- Прогнозирования агрегированного индекса цен (например, ИПЦ) от своих компонент (ИПЦ на продовольственные товары, ИПЦ на непродовольственные товары, ИПЦ на платные услуги).
- Прогноз компонент индекса цен от самого индекса цен.
- Модели векторной авторегрессии для компонент индекса цен.
- Прочие модели, среди которых прогноз ИПЦ от БИПЦ, ИПЦ на продовольственные товары от минимального набора продуктов питания и др.

Всего было оценено 243 прогнозных модели. Для каждой из моделей строились прогнозы на 1, 2, ..., 6 месяцев вперед для временного периода с июня 2012 по сентябрь 2014. При этом использовалась рекурсивная стратегия увеличения объема выборки. Например, сначала параметры моделей оценивались на интервале до мая 2012. Далее строились прогнозы на 1, 2, ..., 6 шагов вперед. Затем выборка увеличивалась на 1 наблюдение (в нашем случае – июнь 2012), после чего параметры переоценивались на выборке до июня 2012 года, и так далее.

Прогнозы строились для двух выборок: с 1999 года и с 2000 года. Также прогнозы считались для данных с использованием результатов тестов на инерционность и без него. Для каждой модели рассчитывалась средняя абсолютная процентная ошибка прогноза (MAPE).

Результаты анализа качественных свойств прогнозов индексов цен приведены в таблице 7.

Таблица 7 – Результаты сравнения точности прогнозов моделей с учетом изменения инерционности и без учета

	с 1999		с 2000		Модель с учетом изменения инерционности, оцененная с 1999 г. и модели без учета смены инерционности, оцененная с 2000 г.	
	% случаев, когда учет инерционности дает результат не хуже ¹¹	% случаев, когда учет инерционности дает результат лучше	% случаев, когда учет инерционности дает результат не хуже	% случаев, когда учет инерционности дает результат лучше	% случаев, когда учет инерционности дает результат не хуже	% случаев, когда учет инерционности дает результат лучше
h=1	85.89	62.50	90.32	25.81	77.02	60.48
h=2	83.06	59.68	88.31	23.79	74.19	57.66
h=3	84.68	61.29	88.71	24.19	75.00	58.47
h=4	85.08	61.69	91.13	26.61	77.82	61.29
h=5	86.29	62.90	90.32	25.81	79.03	62.50
h=6	86.29	62.90	90.73	26.21	79.03	62.50

Первые два столбца таблицы 7 соответствуют выборке с 1999 года (это значит, что и оценка моделей, и тесты на инерционность выполнялись для полной выборки с 1999 года). Для полной выборки применение тестов на смену инерционности дает результат не хуже, чем аналогичные модели, примерно в 85% случаев, и результат лучше (то есть со средней абсолютной ошибкой прогноза строго меньше ошибки модели, оцененной без учета инерционности) в 60% случаев¹².

Вторые два столбца показывают аналогичные статистики для подвыборки с 2000 года. Модели с учетом инерционности дают результаты не хуже, чем модели без учета инерционности примерно в 90% случаев, и результаты строго лучше в 25%. Настолько сильное падение доли прогнозов со строго меньшей прогнозной ошибкой объяснимо. Дело в том, что в 1999-м году цены характеризовались атипично высокими для остальной выборки значениями. При оценивании моделей на выборке с 1999 года этот отрезок сильно влияет на коэффициенты моделей и приводит к ухудшению качества прогнозов. При тестировании инерционности на выборке с 1999 тесты находят сдвиг в инерционности для большего числа моделей (чем для выборки с 2000), что приводит к удалению из рассмотрения части ряда, предшествующей сдвигу (в которую включается «нестабильный» 1999 год). То есть на полной выборке ценность тестов на смену инерционности состоит в том, что они помогают отсечь нестабильный отрезок ряда, существенно улучшая качество прогнозов. При начале оценок с 2000 года процент

¹¹ Модели, прогнозирующие не хуже, чем конкретная модель, - это модели, прогнозирующие строго лучше, чем эта модель, и имеющие одинаковую прогнозную ошибку.

¹² Такое большое различие обусловлено тем, что мы рассматриваем большое число простейших моделей, прогнозы по которым не зависят от результатов LR теста.

моделей с меньшими прогнозными ошибками уменьшается из-за более стабильного периода в целом.

Наконец, последние два столбца таблицы 7 сравнивают модели, полученные при применении тестов на инерционность с 1999 и модели, не учитывающие инерционность, с 2000. Здесь мы пытаемся ответить на следующий вопрос. Если в распоряжении исследователя есть нестабильная выборка, какая из стратегий даст более точные прогнозы: на глаз (или исходя из экономической логики) отбросить часть выборки или же исключить часть выборки из рассмотрения до даты, определенной тестом на сдвиг в инерционности. Из таблицы следует, что использование тестов на смену инерционности дает результаты лучше, чем альтернативная стратегия в большинстве случаев.

Анализ таблицы 7 мы завершим замечанием относительно стабильности полученных результатов к смене горизонта прогнозирования. Действительно, размах вариации в каждом столбце приблизительно равен 3 процентным пунктам, что свидетельствует в пользу предложенного LR теста.

Заключение

Это исследование является первым русскоязычным обзором основных работ, посвященных смене инерционности.

Результаты данного исследования могут рассматриваться как практическая рекомендация по улучшению моделей, применяемых для построения прогнозов российских индексов цен. В частности, применение результатов тестов на смену инерционности временного ряда с высокой степенью вероятности может способствовать повышению точности прогнозов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Andrews, D., 1993. Tests for Parameter Instability and Structural Change with Unknown Change Point. *Econometrica*, Issue 61, pp. 821-856.

Andrews, D. & Chen, H.-Y., 1994. Approximately Median-Unbiased Estimation of Autoregressive Models. *Journal of Business & Economic Statistics*, Issue 12, pp. 187-204.

Andrews, D. & Ploberger, W., 1994. Optimal Tests When a Nuisance Parameter is Present Only Under the Alternative. *Econometrica*, Issue 62, pp. 1383-1414.

Banerjee, A., Lumsdaine, R. & Stock, J., б.д. Recursive and Sequential Tests of the Unit-Root and Trend-Break Hypotheses: Theory and International Evidence. *Journal of Business and Economic Statistics*, Issue 10, pp. 271-287.

Busetti, F. & Taylor, A., 2004. Tests of stationarity against a change in persistence. *Journal of Econometrics*, Issue 123, pp. 33-66.

Cavaliere, G. & Taylor, A., 2006. Testing for a Change in Persistence in the Presence of a Volatility Shift. *Oxford Bulletin of Economics & Statistics*, Issue 68, p. 761-781.

Cavaliere, G. & Taylor, A., 2008. Testing for a change in persistence in the presence of non-stationary volatility. *Journal of Econometrics*, Issue 147, pp. 84-98.

Chen, Z. & Tian, Z., 2012. Moving ratio test for multiple changes in persistence. *Journal of Systems Science & Complexity*, Issue 25, pp. 582-593.

Chen, Z., Tian, Z. & Wei, Y., 2010. Monitoring change in persistence in linear time series. *Statistics and Probability Letters*, Issue 80, pp. 1520-1527.

Chen, Z., Zheng, J., Tian, Z. & Qi, P., 2012. Bootstrap testing multiple changes in persistence for a heavy-tailed sequence. *Computational Statistics & Data Analysis*, Issue 56, pp. 2303-2316.

Chong, T.-L., 2001. Structural Change in AR(1) Models. *Econometric Theory*, Issue 17, pp. 87-155.

Elliott, G., 1999. Efficient Tests for a Unit Root when the Initial Observation is Drawn from its Unconditional Distribution. *International Economic Review*, Issue 40, pp. 767-783.

- Furno, M., 2014. Sign tests for unit root and change in persistence. *International Journal of Computational Economics & Econometrics*, Issue 4, pp. 269-287.
- Halunga, A. & Osborn, D., 2012. Ratio-based estimators for a change point in persistence. *Journal of Econometrics*, Issue 171, pp. 24-31.
- Hansen, B., 1991. Testing for structural change of unknown form in models with nonstationary regressors. *Unpublished Manuskript*.
- Hansen, B., 1997. Approximate asymptotic p-values for structural-change tests. *Journal of Business & Economic Statistics*, Issue 15, pp. 60-67.
- Harvey, D., Leybourne, S. & Taylor, A., 2006. Modified tests for a change in persistence. *Journal of Econometrics*, Issue 134, pp. 441-469.
- Hassler, U. & Scheithauer, J., 2008. On Critical Values of Tests against a Change in Persistence. *Oxford Bulletin of Economics & Statistics*, Issue 70, pp. 705-710.
- Jansson, M. & Nielsen, M., 2012. Nearly Efficient Likelihood Tests of the Unit Root Hypothesis. *Econometrica*, Volume 80, pp. 2321-2332.
- Kejriwal, M., 2012. The Nature of Persistence in Euro Area Inflation: A Reconsideration. *Unpublished Manuskript*.
- Kejriwal, M. & Perron, P., 2010. A Sequential Procedure to Determine the Number of Breaks in Trend with an Integrated or Stationary Noise Component. *Journal of Time Series Analysis*, Issue 31, pp. 305-328.
- Kejriwal, M. & Perron, P., 2012. A note on estimating a structural change in persistence. *Economics Letters*, Issue 117, pp. 932-935.
- Kejriwal, M., Perron, P. & Zhou, J., 2013. Wald Tests for detecting Multiple Structural Changes in Persistence. *Econometric Theory*, Issue 29, pp. 289-323.
- Kim, J., 2000. Detection of change in persistence of a linear time series. *Journal of Econometrics*, Tom 95, pp. 97-116.
- Kim, J., Belaire Franch, J. & Badillo Amador, R., 2002. Corrigendum to "Detection of change in persistence of a linear time series". *Journal of Econometrics*, Issue 109, pp. 389-392.
- Kruse, R., 2013. Forecasting autoregressive time series under possible changes in persistence. *Unpublished Manuskript*.

Kurozumi, E., 2005. Detection of Structural Change in the Long-run Persistence in a Univariate Time Series. *Oxford Bulletin of Economics & Statistics*, Issue 67, pp. 181-206.

Kurozumi, E. & Tanaka, S., 2010. Reducing the size distortion of the KPSS test. *Journal of Time Series Analysis*, Issue 31, pp. 415-426.

Leybourne, S., Kim, T.-H. & Taylor, A., 2007. Detecting multiple changes in persistence. *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, Issue 11, p. Article 2.

Leybourne, S., Kim, T.-H., Taylor, A. & Newbold, P., 2003. Tests for a change in persistence against the null of difference-stationarity. *Econometrics Journal*, Issue 6, pp. 290-310.

Leybourne, S. & Taylor, A., 2004. On Tests for Changes in Persistence. *Economics Letters*, Issue 84, pp. 107-115.

Leybourne, S. & Taylor, A., 2004. Some New Tests for a Change in Persistence. *Economics Bulletin*, Issue 39, pp. 1-10.

Leybourne, S. & Taylor, A., 2006. Persistence change tests and shifting stable autoregressions. *Economics Letters*, Issue 91, pp. 44-49.

Leybourne, S., Taylor, A. & Kim, T., 2006. CUSUM of squares-based tests for a change in persistence. *Journal of Time series Analysis*, Issue 28, pp. 408-433.

Ng, S. & Perron, P., 2001. Lag Length Selection and the Construction of Unit Root Tests with Good Size and Power. *Econometrica*, Volume 69, pp. 1519-1554.

Oya, K. & Toda, H. Y., 1998. Dickey-Fuller, Lagrange multiplier and combined tests for a unit root in autoregressive time series. *Journal of Time Series Analysis*, Issue 19, pp. 325-347.

Oya, K. & Toda, H. Y., 1998. Dickey-Fuller, Lagrange multiplier and combined tests for a unit root in autoregressive time series. *Journal of Time Series Analysis*, Issue 19, pp. 325-347.

Perron, P., 2006. Dealing with Structural Breaks. *Improving power and size in unit root testing. Palgrave Handbooks of Econometrics: Vol. 1 Econometric Theory*, Chapter 8. T. C. Mills and K. Patterson (eds.). Palgrave MacMillan, Basingstoke., pp. 278-352.

Perron, P. & Qu, Z., 2006. Estimating Restricted Structural Change Models. *Journal of Econometrics*, Issue 134.

Rossi, B., 2005. Confidence intervals for half-life deviations from purchasing power parity. *Journal of Business & Economic Statistics*, Issue 23, pp. 432-442.

Schmidt, P. & Phillips, P. C. B., б.д. LM Tests for a Unit Root in the Presence of Deterministic Trends. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, Issue 54, pp. 257-287.

Skrobotov, A., 2015. Likelihood Ratio Test for Change in Persistence. *Unpublished Manuscript*.

Stock, J. H. & Watson, M., 2007. Why Has U.S. Inflation Become Harder to Forecast?. *Journal of Money, Credit & Banking*, Issue 39, pp. 3-33.

Taylor, A., 2005. Fluctuations Tests for a Change in Persistence. *Oxford Bulletin of Economics & Statistics*, Issue 67, pp. 207-230.

Vogelsang, T., 1998. Trend Function Hypothesis Testing in the Presence of Serial Correlation. *Econometrica*, Issue 66, pp. 123-148.

Xiao, Z., 2001. Testing the null hypothesis of stationarity against an autoregressive unit root alternative. *Journal of Time Series Analysis*, Issue 22, pp. 87-105.

Yang, Y. & Jin, H., 2014. Tests for Persistence Change with Heavy Tailed Observations. *Journal of Networks*, Issue 9, pp. 1409-1415.