Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»

Луговой О.В., Полбин А.В., Поташников В.Ю.

Байесовский подход к продлению таблиц «Затраты–Выпуск»

Москва 2015

Аннотация. В работе обсуждается Байесовский подход к продлению таблиц «Затраты–Выпуск». В отличие от популярных методов продления (RAS, минимизации перекрестной энтропии), предлагаемый подход использует технику сэмплирования матриц, что позволяют оценить вероятностное распределение коэффициентов прямых затрат при продлении межотраслевого баланса. Данное вероятностное распределение определяется набором (выборкой) оцениваемых таблиц, каждая из которых не противоречит имеющимся данным и ограничениям. В отличие от точечных оценок, стохастические таблицы напрямую инкорпорируют информацию о неопределенности каждой оцененной ячейки таблиц «Затраты-Выпуск», учитывая зависимость между ними. С целью апробации предлагаемой методики проводится экспериментальная оценка таблиц «Затраты–Выпуск» российской экономики за 2003 г. на основе таблиц 1998-2002 г.

Ключевые слова: продление и балансировка таблиц «Затраты–Выпуск», метод Байеса, методы Монте–Карло по схеме марковской цепи.

Луговой Олег Валерьевич – ведущий научный сотрудник Центра экономического моделирования энергетики и экологии Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации.

Полбин Андрей Владимирович – старший научный сотрудник Центра экономического моделирования энергетики и экологии Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, старший научный сотрудник Института экономической политики Е.Т. Гайдара.

Поташников Владимир Юрьевич – старший научный сотрудник Центра экономического моделирования энергетики и экологии Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации.

Данная работа подготовлена на основе материалов научно-исследовательской работы, выполненной в соответствии с Государственным заданием РАНХиГС при Президенте Российской Федерации на 2014 год.

Оглавление

1 Введение

Задача продления таблиц «Затраты-Выпуск» широко используется как в прикладных исследованиях (например, для калибровки вычислительных моделей общего равновесия), так и статистическими службами для оценки таблиц между базовыми статистическими обследованиями предприятий. Для этих целей обычно используются технические методы продления матриц, которые на выходе дают сбалансированную оценку таблиц «Затраты-Выпуск» за рассматриваемый год, согласующуюся с доступными статистическими данными СНС. В довольно общей постановке задача продления соответствующих таблиц сводится к нахождению матрицы прямых затрат *A*, которая удовлетворяет следующим ограничениям:

$$\begin{aligned} &Y = AX, \\ &\textstyle\sum_i a_{i,j} = \bar{a}_j, \quad a_{i,j} \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

где *Y*, *X* — известные вектора промежуточного спроса и выпуска, соответственно, $a_{i,j}$ — коэффициенты прямых затрат, которые являются элементами матрицы *A*, $\bar{a}_j$— известная сумма по столбцам матрицы *A*, которая представляет собой долю промежуточного потребления в выпуске отрасли *j*.

В общем случае система уравнений (1) является недоопределённой и имеет бесконечное число решений. При продлении обычно предполагается, что известна матрица прямых затрат A^0 некоторого предыдущего периода. Одним из наиболее популярных подходов продления таблиц «Затраты-Выпуск» по причине простоты имплементации является метод RAS (Stone, 1961), в котором проводится итеративная процедура балансировки неизвестной таблицы «Затраты-Выпуск», где для первого приближения используется матрица прямых затрат A^0.

Более сложные методы оптимизации сводятся к нахождению такой матрицы коэффициентов прямых затрат $\hat{A}$, которая минимизирует некоторую меру расстояния $\left\{\Psi(A, A^0)\right\}$ от известной матрицы A^0, то есть $\widehat{A} = \arg\min\left\{\Psi(A, A^0)\right\}$ при условии совместности оцениваемой матрицы с системой уравнений (1). Например, Алмон (Almon, 1968) минимизирует меру квадратов разностей между коэффициентами прямых затрат A и априорным распределением коэффициентов A^0 при ограничениях (1), Байрон (Byron, 1978) минимизирует меру взвешенных квадратов разностей, Голан и др. (Golan et al., 1994) для продления таблиц «Затраты-Выпуск» минимизируют меру перекрестной энтропии между матрицами (детальный обзор альтернативных подходов к продлению таблиц «Затраты-Выпуск» см., например, в работе (Temurshoev et al., 2011)).

Оговоренные выше методы ставят целью получение какой–либо одной оценки неизвестной матрицы *A*. При этом вопрос неопределенности оцениваемых параметров является не менее информативным, чем сама оценка, и может проводиться совместно с точечными оценками.

Предлагаемый в данной работе метод позволяет оценивать распределения коэффициентов прямых затрат, а также множественные ковариации между одновременно оцениваемыми показателями. Метод основан на вероятностном подходе Байеса с использованием широкого круга априорной информации, как количественной статистической, так и качественной, включая экспертные оценки, и отслеживать влияние этой информации на конечный результат. Данная методика может использоваться для продления, дезагрегации, дооценки, балансировки матриц «Затраты-Выпуск», и более широко — матриц социальных счетов. Полученные вероятностные оценки могут иметь широкое прикладное значение.

Вопрос учета неопределенности при оценке коэффициентов матриц «Затраты-Выпуск», вероятностном описании коэффициентов матриц, развивается по нескольким направлениям, в зависимости от целей и методологии. Прежде всего, следует отметить, что идея описания коэффициентов прямых затрат в виде некоторых случайных величин, что может быть обусловлено ошибками измерения, нечеткой классификацией отраслей и продуктов, агрегацией данных по отдельным отраслям и фирмам с негомогенной технологией и др., получила достаточно широкое развитие в литературе (см., например, ((Quandt, 1958; Ершов, 1969; Goicoechea, Hansen, 1978; Díaz, Morillas, 2011), среди многих). И мы расширяем данное соображение о стохастичности таблиц «Затраты-Выпуск» на задачу продления рассматриваемых таблиц.

В работах (Byron, 1978; van der Ploeg,1982; Weale,1988; Rampa, 2008; Lenzen M. et al., 2012) в достаточно общей постановке задачи при балансировке данных национальных счетов минимизировалась мера взвешенных квадратов разностей $(p-p^0)\Sigma^{-1}(p-p^0)'$ при соответствующих балансовых ограничениях, где p — вектор оцениваемых параметров, p^0— вектор априорных значений оцениваемых параметров, в качестве которого при продлении таблиц «Затраты-Выпуск» может выступать матрица предыдущего периода (в векторизованном виде), Σ^{-1}— взвешивающая матрица, которая отражает меру неопределенности оцениваемых параметров. И нахождение минимума рассматриваемой меры взвешенных квадратов разностей будет эквивалентно оценке моды апостериорного распределения в предлагаемом в настоящей работе методе Байеса, если в качестве априорного распределения использовать многомерное нормальное распределение $p \sim N(p^0, \Sigma)$.

В работах (Heckelei et al., 2008; Rodrigues, 2014) так же как и в настоящей работе предлагалось следовать Байесовскому подходу при продлении и балансировке данных национальных счетов, но авторы концентрировали своё внимание на нахождении точечной оценки неизвестных параметров. В отличие от вышеназванных работ в настоящей работе предлагается метод оценки апостериорной плотности распределения оцениваемых коэффициентов прямых затрат наряду с точечными оценками (моды, среднего).

2 Общие сведения о методе Баейса в статистическом анализе

В контексте Байесовской эконометрики предполагается, что перед началом эксперимента исследователь обладает некоторыми верами относительно значения оцениваемого параметра θ, которые выражаются в виде вероятностного распределения $p(\theta)$, называемого априорным распределением.

В результате учета статистических данных распределение параметра уточняется, переходя от априорного распределения к апостериорному, в соответствии с законом Байеса:

$$p(\theta | Y) = \frac{L(Y | \theta) p(\theta)}{\int L(Y | \theta) p(\theta) d\theta} \propto L(Y | \theta) p(\theta) \tag{2}$$

где $p(\theta | Y)$ — функция плотности апостериорного распределения параметров, $L(Y | \theta)$ — функция правдоподобия.

Апостериорное распределение содержит всю необходимую информацию об оцениваемых параметрах. На ее основе можно получить точечную оценку неизвестных параметров, доверительное множество значений и провести соответствующий анализ корреляции параметров. В качестве точечной оценки обычно выбирается такое значение параметров, которое минимизирует математическое ожидание некоторой функции потерь, где оператор ожидания берется по апостериорному распределению. Наиболее популярной является оценка апостериорного среднего, которая минимизирует функцию апостериорного риска.

Несмотря на всю привлекательность Байесовского метода в прошлом он не был таким популярным из-за численного интегрирования, необходимого для вычисления знаменателя в выражении (2). В некоторых случаях, когда априорное распределение является сопряженным с функцией правдоподобия, апостериорное распределение можно получить в аналитическом виде. Однако в общем же случае решение не имеет аналитического вида.

С развитием вычислительных мощностей современных компьютеров и разработкой методов сэмплирования, таких как методы Монте–Карло по схеме марковской цепи (MCMC), позволяющих получать выборку необходимой размерности из апостериорного распределения, значительно расширились возможности применения Байесовского подхода в статистике.

3 Формализация метода Байеса для продления таблиц «Затраты–Выпуск»

В контексте Байесовского метода продления таблиц «Затраты–Выпуск» функцию апостериорного распределения запишем в виде[1]:

$$z = vec(A) \tag{3}$$

$$p(z \mid data) \propto p(z) I_{\Psi}(z) \tilde{L}(Y \mid z) \tag{4}$$

В уравнении (3) vec обозначает оператор векторизации матрицы, т.е. после применения данного оператора матрица переходит в вектор, в котором последовательно записаны столбцы исходной матрицы. В уравнении (4) $p(z \mid data)$ — апостериорное распределение вектора коэффициентов прямых затрат, $p(z)$ — некоторое априорное распределение.

В прикладных задачах предлагаемого метода часть линейных ограничений может рассматриваться с ошибкой измерения, а часть без. Например, возможна ситуация, когда вектор промежуточного спроса (или некоторые его компоненты) не известен с достоверностью, но для него существуют некоторые оценки. Соответственно, в качестве функции правдоподобия мы рассматриваем функцию $I_{\Psi}(z)\tilde{L}(Y \mid z)$, где $I_{\Psi}(z)$ — индикаторная функция, которая равна единице, если все линейные ограничения системы без ошибок измерения выполнены, и равна нулю в противном случае, $\tilde{L}(Y \mid z)$ — функция правдоподобия для линейных ограничений с ошибкой измерения.

В качестве априорного распределения могут выступать, например, усеченное на отрезке [0,1] нормальное распределение, бета распределение и равномерное

---

[1] В работе (Heckelei et al., 2008) формулировалась аналогичная задача, но авторы не проводили оценку апостериорной плотности распределения коэффициентов прямых затрат, а оценивали только моду апостериорного распределения с помощью численных методов.

распределение на отрезке [0,1]. Если присутствует априорная информация, что некоторый коэффициент равен определенному значению, то данная информация будет вводиться в виде линейного ограничения и учитываться в индикаторной функции. Так, довольно естественными ограничениями могут быть равенства нулю тех коэффициентов, которые были нулевыми в предыдущие годы. Использование в уравнении (4) индикаторной функции в качестве компоненты функции правдоподобия может показаться необычным. Представим на момент, что все линейные ограничения измерены с некоторой ошибкой измерения, которая имеет нормальное распределение. Тогда функция правдоподобия принимает стандартное Гауссовское распределение. Если теперь устремить дисперсии ошибок к нулю, то функция правдоподобия будет стремиться к функции Дирака. И, таким образом, апостериорное распределение будет прямо пропорционально произведению априорного распределения на индикатор того, что все ограничения выполнены.

Таким образом, в рамках записи (4) нам известна функция апостериорного распределения вектора коэффициентов прямых затрат с точностью до константы, то есть в аналитическом виде функция плотности нам не известна. Мы будем оценивать функцию апостериорного распределения с помощью методов Монте-Карло по схеме марковской цепи, которые позволяют произвести генерацию выборки из оцениваемого распределения. В связи с тем, что в уравнении (4) присутствует индикаторная функция и, соответственно, оцениваемые параметры являются линейно зависимыми, нам необходимо провести модификацию базового алгоритма.

4 Проблема сэмплирования при линейных ограничениях

Для описания метода сэмплирования рассмотрим сначала все линейные ограничения задачи, которые представимы в следующем виде:

$$Bz = T \tag{5}$$

где B и T — известная матрица и известный вектор соответственно, z — неизвестный вектор коэффициентов прямых затрат. Здесь мы просто переписали все линейные ограничения в стандартном представлении системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Если исходная оцениваемая матрица A имеет размерность $n \times n$, в модели также k ограничений на нули и не рассматриваются ошибки измерения, то размерность матрицы B равна $(2n+k)\times n^2$, а размерность вектора T — $(2n+k)\times 1$.

Первые n строк матрицы B будут просто представлять собой кронекерово произведение единичной матрицы размера $n \times n$ и строки выпуска рассматриваемых отраслей $1\times n$, а первые n строк вектора T будут совпадать с вектором промежуточного спроса, что соответствует первой части линейных ограничений системы (1). Следующие n строк матрицы B будут представлять собой кронекерово произведение строки выпуска отраслей $1\times n$ и единичной матрицы размера $n\times n$, а следующие n строк вектора T будут представлять собой вектор промежуточного потребления соответствующих отраслей. Каждая из последних k строк матрицы B будет содержать только нули за исключением одного единичного элемента на i-ом месте, который будет соответствовать априорному ограничению на ноль i-го элемента вектора z. Соответственно, все последние k строк вектора T будут нулевыми.

Так как в системе (5) в общем случае количество неизвестных превосходит количество уравнений, то данная система имеет бесконечное множество решений. Из линейной алгебры известно, что любое решение вырожденной СЛАУ представимо в виде:

$$z = \tilde{z} + F^{(1)}\xi^{(1)} \qquad (6)$$

где $\tilde{z}$ — некоторое частное решение системы (5), $F^{(1)}$ — фундаментальная матрица решений однородной системы уравнений $Bz = 0$.

Частное решение и матрица фундаментальных решений могут быть найдены с помощью метода Гаусса последовательного исключений переменных. Столбцы фундаментальной матрицы решений $F^{(1)} = [f_1^{(1)},..,f_k^{(1)}]$ являются линейно независимыми и представляют собой базис Евклидова подпространства. В данном контексте функция апостериорного распределения принимает достаточно наглядный вид. Действительно, если найти базис ортогонального дополнения $F^{(2)} = [f_1^{(2)},.., f_{n-k}^{(2)}]$, то можно перейти в новую систему координат:

$$\begin{bmatrix} \xi^{(1)} \\ \xi^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^{(1)} \; F^{(2)} \end{bmatrix}^{-1} (z - \tilde{z}) \tag{7}$$

В данной системе координат функция плотности распределения для компоненты $p(z)\tilde{L}(Y \mid z)$ принимает вид:

$$p_{\xi^{(1)},\xi^{(2)}}(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}) \propto \det\begin{bmatrix} F^{(1)} \; F^{(2)} \end{bmatrix} p_Z(\tilde{z} + F^{(1)}\xi^{(1)} + F^{(2)}\xi^{(2)}) L(Y \mid \tilde{z} + F^{(1)}\xi^{(1)} + F^{(2)}\xi^{(2)}) \tag{8}$$

.

Тогда функция плотности апостериорного распределения просто является условной функцией плотности распределения вектора $\xi^{(1)}$ при условии, что координаты вектора $\xi^{(2)}$ равны нулю. И в случае непрерывного распределения принимает вид:

$$p_\xi(\xi \mid data) = p_{\xi^{(1)}|\xi^{(2)}}(\xi^{(1)} \mid \xi^{(2)} = 0) = \frac{p_{\xi^{(1)},\xi^{(2)}}(\xi^{(1)}, \xi^{(2)} = 0)}{p_{\xi^{(2)}}(\xi^{(2)} = 0)} \tag{9}$$

Если бы априорное распределение было нормальным (в совокупности с нормальной ошибкой измерения), то мы могли бы получить аналитическое выражение для функции апостериорного распределения. Действительно, условное распределение нормального распределения также является нормальным. Но из–за того что рассматриваемые параметры по определению ограничены на отрезке [0,1], мы не можем использовать нормальное распределение в явном виде, так как ничто не будет гарантировать неотрицательность коэффициентов прямых затрат.

Таким образом, в окончательной форме апостериорное распределение в новом базисе записывается в виде:

$$p_{\xi}(\xi \mid data) \propto p_Z(\tilde{z} + F^{(1)}\xi^{(1)})L(Y \mid \tilde{z} + F^{(1)}\xi^{(1)}) \qquad (10)$$

Соответственно, мы можем применить базовые методы сэмплирования Монте–Карло по схеме марковской цепи из апостериорного распределения для вектора $\xi^{(1)}$, после чего перейти в исходную систему координат и получить выборку из апостериорного распределения для вектора коэффициентов прямых затрат.

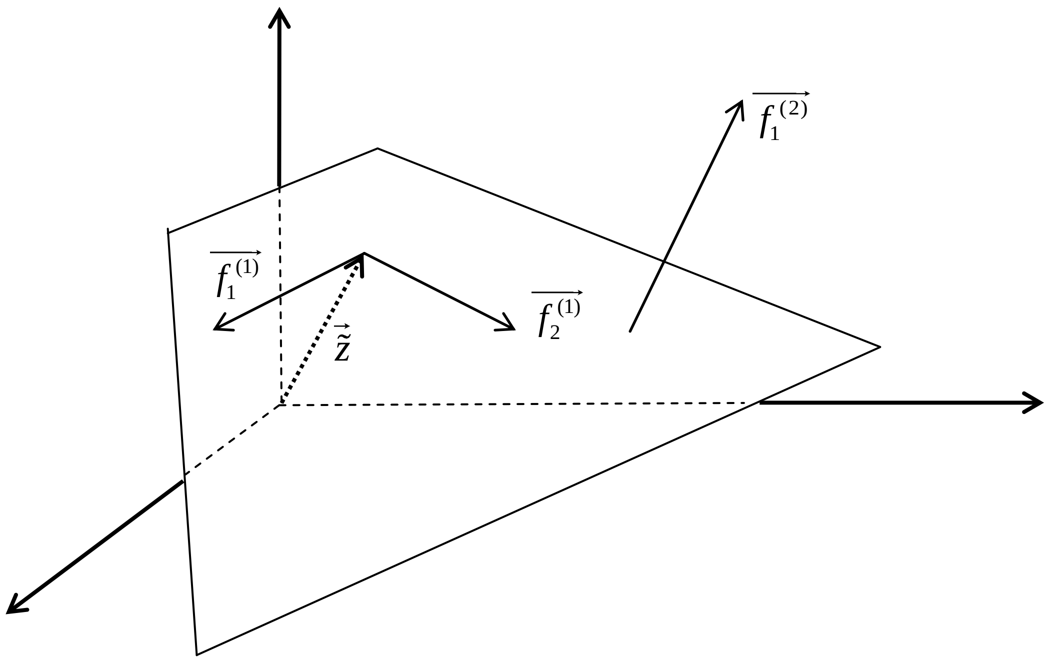

Рисунок 1. Переход в новою систему координат

Основная идея представленного выше изложения отображена на рисунке 1 на иллюстративном примере в трехмерном пространстве. Представленный рисунок иллюстрируют ситуацию, когда в модели три параметра и одно линейное ограничение. Данное линейное ограничение описывает плоскость в трехмерном пространстве, которая является подпространством размерностью 2 исходного пространства. Соответственно, рассматриваемые три параметра могут меняться только вдоль этой плоскости. Если перейти в новую систему координат, то функция апостериорного распределения будет зависеть только от двух параметров, значений координат по векторам $[f_1^{(1)}, f_2^{(1)}]$. Таким образом, мы можем провести сэмплирование из функции апостериорно распределения по данным двум параметрам и получить множество точек на плоскости, которые будут по определению удовлетворять линейным ограничениям. После чего можно перейти обратно в исходное пространство, получив тем самым требуемую выборку из апостериорного распределения в трехмерном пространстве.

В численной имплементации генерации выборки из апостериорного распределения коэффициентов прямых затрат мы будем использовать схему Метрополиса–Хастингса (Metropolis et al., 1953; Hastings,1970) с поэлементным обновлением параметров. Метод был реализован в программных пакетах Matlab[2] и R[3].

Мы протестировали свойства алгоритма на задачах, которые имеют аналитическое решение. Как было отмечено выше, если в качестве априорного распределения коэффициентов прямых затрат выбрать нормальное распределение без каких–либо ограничений на диапазон изменения оцениваемых коэффициентов, то можно получить аналитическую формулу для апостериорного распределения, которое так же будем нормальным распределение. Если в качестве априорного распределения коэффициентов прямых затрат выбрать равномерное распределение на отрезке [0,1] и ввести единственное линейное ограничение, что сумма коэффициентов по столбцам равна единице, то апостериорное распределение для отдельного коэффициента имеет бета-распределение $B(1,N\text{-}1)$, где N — количество столбцов (отраслей). Проведенные эксперименты показали, что алгоритм качественно воспроизводит оцениваемое апостериорное распределение.

5 Экспериментальное продление симметричной таблицы «Затраты-Выпуск» 2003 года

---

[2] http://www.mathworks.com/

[3] http://www.r-project.org/

В настоящей части работы проводится иллюстрация предложенного метода продления межотраслевых балансов на реальных таблицах «Затраты-Выпуск» для российской экономики в номенклатуре ОКОНХ. В эксперименте оценивается «Симметричная таблица «Затраты-Выпуск» в основных ценах за 2003 г.» в разрезе 22-х отраслей. Таким образом, данная таблица трактуется как неизвестная и проводится оценка коэффициентов прямых затрат в предположении, что на момент продления известны вектора выпуска и промежуточного спроса и все опубликованные таблицы за предыдущие годы.

В методе Байеса матрица коэффициентов прямых затрат 2002 года использовалась как априорное среднее усеченного нормального распределения. Стандартные отклонения коэффициентов прямых затрат априорного распределения вычислялись на основе матриц с 1998 по 2002 гг. Для оценки апостериорного распределения строились 2 Марковские цепи длиной в 5 млн. симуляций и отбрасывались первые 20% наблюдений. Далее для снижения автокорреляции выборка была разрежена, для чего на заключительном этапе построения выборки апостериорного распределения использовалась каждая 1000-ая матрица исходной выборки.

На рис. 2 приведены графики апостериорного распределения коэффициентов прямых затрат. Для краткости мы приводим только первые 8 на 6 ячеек исходной матрицы (в исходной матрице 484 ячейки). Закрашенная область в каждой ячейке представляет собой функцию плотности апостериорного распределения, штрихпунктирная линия — истинное значение оцениваемого коэффициента, пунктирная линия — априорное среднее, сплошная линия — моду апостериорного распределения. Мода апостериорного распределения вычислялась в программном пакете GAMS с помощью методов нелинейной оптимизации.

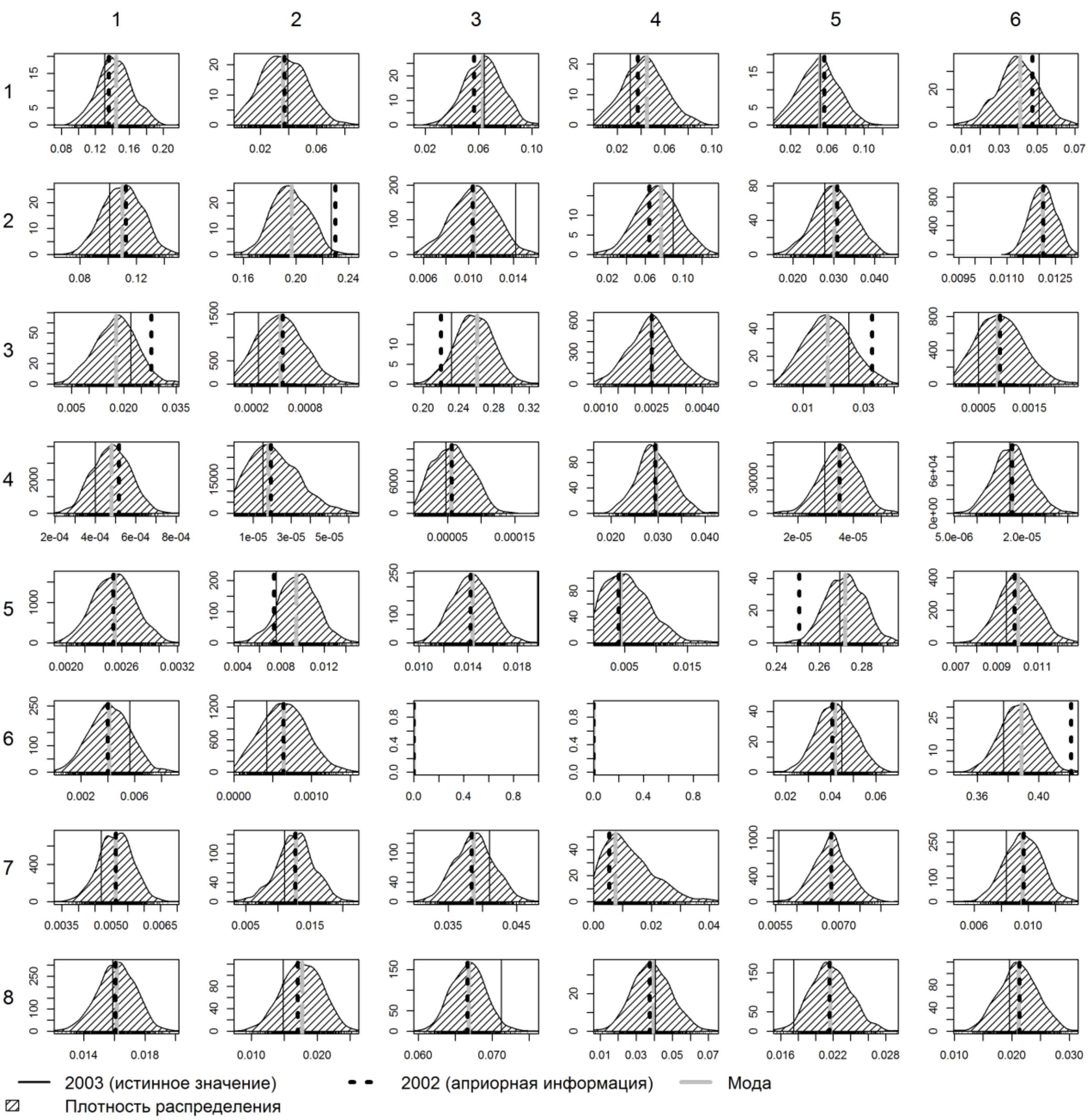

Рисунок 2. Апостериорное распределение подматрицы первых 8x6 ячеек оцениваемой матрицы коэффициентов прямых затрат.

Как следует из рисунка, в целом апостериорное распределение достаточно хорошо накрывает истинные значения оцениваемых коэффициентов. В ряде случаев, например для ячеек (6,6) и (3,1), апостериорное распределение сильно сдвинулось от априорного в сторону истинного значения, то есть в данном случае доступная информация в линейных ограничениях значительно улучшает оценку данных параметров. Для некоторых ячеек, таких как ячейки (2,6) и (8,3) апостериорное распределение сконцентрировано около априорного распределения и плотность вероятности в окрестности истинного коэффициента прямых затрат невелика. Данная проблема является естественной в условиях большого объема оцениваемых параметров при малом объеме ограничений, которые несут информацию об оцениваемых параметрах, особенно при интенсификации структурных изменений. Какие–либо экспертные оценки и дополнительный набор данных могли бы значительно улучшить качество оценок.

Следует отметить, что распределения отдельных ячеек на рис. 2 не являются независимыми между собой. Так, если, например, для всех ячеек первого столбца выбрать коэффициенты прямых затрат из правого края апостериорного распределения, то «модельное» промежуточное потребление будет превышать фактическое. Метод дает именно выборку матриц коэффициентов прямых затрат из апостериорного распределения, которые удовлетворяют всем ограничениям. И данные матрицы могут быть использованы в прикладных экономических задачах для анализа на чувствительность результатов при калибровке экономико–математических моделей.

6 Заключение

В работе рассмотрен Байесовский подход для продления таблиц «Затраты–Выпуск». Основной целью настоящей методики является вероятностная оценка неизвестных таблиц «Затраты-Выпуск». Предложен алгоритм сэмплирования матриц коэффициентов прямых затрат из апостериорного распределения, на выходе которого получается сколь угодно большая выборка таблиц «Затраты-Выпуск», не противоречащих имеющийся априорной информации. На основе полученной выборки могут быть сделаны оценки апостериорного среднего, моды, ковариации, полученных оценок ячеек, сделаны выводы относительно наиболее неопределенных ячеек таблиц, вероятных структурных сдвигов, ошибок наблюдения. Также полученные стохастические таблицы могут иметь широкое прикладное значение, например, для анализа чувствительности результатов при калибровке экономико–математических моделей. Экспериментальное применение предложенного метода на реальных данных продемонстрировало его адекватность, и вычислительную доступность предлагаемой методики.

Литература

1. Баранов Э.Ф., Ким И.А., Старицына Е.А. Методологические вопросы реконструкции системы таблиц «затраты-выпуск» России за 2003 и последующие годы в структуре ОКВЭД-ОКПД //Вопросы статистики. – 2011. – №. 12. – С. 3-8.

2. Баранов Э.Ф., Ким И.А., Пионтковский Д.И., Старицына Е.А. Вопросы построения таблиц "затраты-выпуск" России в международных классификаторах // Экономический журнал Высшей школы экономики. – 2014. – Т. 18. № 1. С. 7-42.

3. Ершов Э.Б. Неопределённость информации и устойчивость решения статической модели планового межотраслевого баланса. // Проблемы народнохозяйственного оптимума. М.: Экономика, 1969.

4. Almon C. Recent methodological advances in input-output in the United States and Canada //Fourth International Conference on Input-Output Techniques, Geneva. – 1968.

5. Byron R. P. The estimation of large social account matrices //Journal of the Royal statistical Society. Series A (General). – 1978. – P. 359-367.

6. Díaz B., Morillas A. Incorporating uncertainty in the coefficients and multipliers of an IO table: A case study //Papers in Regional Science. – 2011. – Vol. 90. – №. 4. – P. 845-861.

7. Goicoechea A., Hansen D. R. An input-output model with stochastic parameters for economic analysis //AIIE Transactions. – 1978. – Vol. 10. – №. 3. – P. 285-291.

8. Golan A., Judge G., Robinson S. Recovering information from incomplete or partial multisectoral economic data //The Review of Economics and Statistics. – 1994. – P. 541-549.

9. Hastings W. K. Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications //Biometrika. – 1970. – Vol. 57. – №. 1. – P. 97-109.

10. Heckelei T., Mittelhammer R., Jansson T. A Bayesian alternative to generalized cross entropy solutions for underdetermined econometric models //Food and Resource Economics Discussion Paper. – 2008. – Vol. 2.

11. Lenzen M. et al. A cycling method for constructing input–output table time series from incomplete data //Economic Systems Research. – 2012. – Vol. 24. – №. 4. – P. 413-432.

12. Metropolis N. et al. Equation of state calculations by fast computing machines //The journal of chemical physics. – 1953. – Vol. 21. – №. 6. – P. 1087-1092.

13. Quandt R. E. Probabilistic errors in the Leontief system //Naval Research Logistics Quarterly. – 1958. – Vol. 5. – №. 2. – P. 155-170.

14. Rampa G. Using weighted least squares to deflate input–output tables //Economic Systems Research. – 2008. – Vol. 20. – №. 3. – P. 259-276.

15. Rodrigues J.F.D. A Bayesian Approach to the Balancing of Statistical Economic Data //Entropy. – 2014. – Vol. 16. – №. 3. – P. 1243-1271.

16. Stone R. Input-output and national accounts. – Paris, France : Organisation for european economic cooperation, 1961.

17. Temurshoev U., Webb C., Yamano N. Projection of Supply and Use tables: methods and their empirical assessment //Economic Systems Research. – 2011. – Vol. 23. – №. 1. – P. 91-123.

18. van der Ploeg F. Reliability and the adjustment of sequences of large economic accounting matrices //Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General). – 1982. – P. 169-194.

19. Weale M. The reconciliation of values, volumes and prices in the national accounts //Journal of the Royal Statistical Society. Series A (Statistics in Society). – 1988. – P. 211-221.