Алгоритм быстрого нахождения долгосрочных равновесий в моделях пересекающихся поколений

Зайцев Алексей Викторович

РАНХиГС

Аннотация

В данной работе мы рассматриваем задачу нахождения долгосрочных равновесий в моделях пересекающихся поколений с большим количеством периодов. Часто можно свести решение модели к нахождению корней системы уравнений. Некторые OLG-модели после введения дополнительных переменных можно привести к виду системы многочленов. Таким образом можно представить множество долгосрочных равновесий как алгебраическое многообразие. Это позволяет использовать в экономических задачах вычислительные методы из алгебраической геометрии. В частности, стал популярен метод, использующий базисы Грёбнера. Однако, этот подход возможно эффективно применять только в том случае, когда переменных мало. Мы предлагаем алгоритм нахождения решений системы и исследуем с его помощью наличие множественности решений в реалистично откалиброванных моделях с долгоживущими агентами.

Ключевые слова: OLG-модели, множественность равновесий, базисы Грёбнера, система многочленов

JEL codes: C02, C32, D11, D58

1 Вступление

В данной статье мы применяем вычислительные методы к реалистично откалиброванным моделям пересекающихся поколений. В частности, предлагается новый алгоритм нахождения равновесий, который апробируется в нескольких OLG-моделях. Этот алгоритм достаточно эффективен для исследования модели на наличие множественности равновесия методом Монте-Карло.

OLG-модели используютя во многих областях современной экономики, например, в макроэкономике и финансах (ALtig et al., 2001; Auerbach and Kotlikoff, 1983; Auerbach and Kotlikoff, 1987; Summers, 1981). Эти модели со временем улучшались, в них добавлялись несколько регионов, разные товары и демографические изменения, например Kotlikoff et al. (2007). В последнее время появились работы в области изменения климата, использующие OLG-модели, (Bovenberg and Heijdra, 1998; Fried et al., 2018; Kotlikoff et al., 2021). В качестве примеров исследований с использованием OLG моделей, опубликованных в отечественных журналах, можно привести следующие: Зубарев и Нестерова (2022), Луговой и Полбин (2016), Нестерова (2021), Норкина и Пекарский (2015).

К сожалению, в данных моделях возможна множественность равновесий. В работе Kehoe and Levine (1990) можно найти простой пример модели с тремя периодами, в которой есть множественность долгосрочных равновесий. Однако, в статье Kubler and Schmedders (2010) содержится утверждение, что при большом количестве периодов жизни агентов вероятность множественности мала.

Наличие множественности равновесий в экономической системе может служить объяснением важных феноменов, таких как обвалы рынка, например Hong and Stein (2003) и Basak et al. (2006). Хотя это явление хорошо изучено для финансовых рынков, для моделей с домохозяйствами известно гораздо меньше. Информация о возможности множественности равновесия имеет важное практическое значение. Так, при наличии двух равновесий, одно из них предпочтительнее другого и стратегия поведения экономических агентов может меняться в зависимости от их ожиданий.

В работе Kubler and Schmedders (2010) утверждается, что во многих экономических моделях равновесие можно найти решая систему полиномиальных уравнений. Для этого часто используются численные методы из алгебраической геометрии, в частности, базисы Грёбнера. Недостаток такого подхода состоит в том, что при большом количестве периодов сложность алгоритма растет слишком быстро. В частности, вычислительная сложность алгоритма Бухбергера, который используется чаще всего, это двойная экспонента от количества переменных (Becker and Weispfenning, 2012). Поэтому этот метод невозможно применить в модели с реалистичным количеством периодов жизни агентов.

В работе Basiri et al. (2022) предлагается альтернативный алгоритм нахождения базиса Грёбнера для модели, в которой есть производство и эндогенный труд. Предлагается сначала найти многочлен от одной переменной, лежащий в идеале, порождённом уравнениями модели, и, используя лемму о форме, достроить его до базиса Грёбнера. Этот алгоритм существенно ускоряет поиск решения, но всё еще тратит много времени (больше минуты) для нахождения равновесия, что делает его неподходящим для исследования феномена множественности решений.

В данной статье применяется новый алгоритм, который работает ещё быстрее. В частности, для этого используется метод быстрого нахождения всех вещественных корней многочлена с определёнными свойствами. Новый алгоритм можно применять для поиска множественных решений.

Мы сначала рассматриваем самую простую модель и реплицируем результаты работы Kubler and Schmedders (2010), используя новый алгоритм. Далее мы рассматриваем модель с экзогенным трудом и реплицируем результаты работы Basiri et al. (2022). Наш алгоритм позволяет провести эксперименты Монте-Карло и исследовать модель на наличие множественных равновесий. Наконец, мы рассматриваем расширенную модель с эндогенным трудом. Её мы тоже исследуем на наличие множественности равновесий с помощью метода Монте-Карло.

В частности, мы описываем пример модели, в которой появляется множественность равновесий. Из этих равновесий одно эффективное, а остальные два - нет.

Данная работа организована по главам. Во второй главе описывается простая модель с известным примером множественности решений. В третьей мы предлагаем новый алгоритм для нахождения равновесий, который не использует базисы Грёбнера. В четвертой части для ускорения вычислений был придуман новый алгоритм нахождения корней многочлена от одной переменной, который позволяет считать решения многочленов нужного вида. В пятой рассматривается расширенная изначальная модель с экзогенным трудом и фирмой-производителем и переносятся все результаты. В шестой главе рассматривается расширенная спецификация с эндогенным трудом. В седьмой части будут приведены примеры работы алгоритма, в том числе множественное равновесие в простой модели. Восьмая глава содержит результаты поиска возможных множественных решений во всех рассмотренных моделях и время, за которое алгоритм находит решения. Девятая глава содержит краткое описание проделанной работы и полученных результатов.

2 Простой пример модели

Данная модель была описана в работе Kubler and Schmedders (2010). Рассмотрим так называемую двустороннюю бесконечную модель. В ней дискретное время течёт от $-\infty$ до $+\infty$. В каждый момент времени рождается один агент, который живет n периодов. В a-ый период жизни каждый агент получает пожертвование в размере e_a. Для простоты и без потери общности можно предположить, что в модели нет временного дисконта и функция полезности не зависит от времени. Тогда агент, который родился в период под номером t, максимизирует функцию полезности

$$U_t = \sum_{a=1}^{n} u(c_a(t+a-1))$$

где $c_a(t+a-1)$ обозначает потребление этого агента в момент времени $t+a-1$. Предположим, что полезность не зависит от времени и ставки.

Равновесие задаётся уравнением

$$\begin{cases} \sum_{a=1}^{n} \bar{c_a}(t) - e_a = 0 \\ (\bar{c_1}(t), \bar{c_2}(t+1), \ldots, \bar{c_n}(t+n-1)) \in \underset{c(t),\ldots,c(t_+n-1)}{arg\,max} \; U_t(c(t), \ldots, c(t+n-1)) \end{cases} \tag{2.1}$$

При этом максимум ищется при условии $\sum_{a=1}^{n} p(t+a-1)(c(t+a-1) - e_a) = 0$. Это соответсвует тому, что агенты торгуют друг с другом.

Для решения данной системы нужно найти бесконечное количество цен и потреблений. Нашими методами решать эту задачу невозможно. Но вместо этого можно искать долгосрочные равновесия.

Долгосрочное состояние добавляет два условия:

$$\begin{cases} \frac{p_{t+1}}{p_t} = q \\ \bar{c_a}(t) = c_a \end{cases} \tag{2.2}$$

Есть долгосрочные равновесия двух типов: монетарное (при $q = 1$) и 'реальные' ($q \neq 1$). Нас будет интересовать количество реальных решений.

В прикладных исследованиях часто используется функция полезности $u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$ для $0 < \sigma < 1$ и логарифмическая функция для $\sigma = 1$. При данных условиях система приобретает вид:

$$\begin{cases} c_{a+1}^{\sigma} q - c_a^{\sigma} = 0, \qquad\qquad a = 1, \ldots, n-1 \\ \sum_{a=1}^{n} q^{a-1}(c_a - e_a) = 0 \\ \sum_{a=1}^{n} (c_a - e_a) = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Действительно, система имеет решение $q = 1$ и $c_a = (\frac{1}{n}\sum_{a=1}^{n} e_a)$. Для того, чтобы найти другие решения, сделаем замену $w = q^{\frac{1}{\sigma}}$. После замены система примет вид:

$$
\begin{cases}
c_{a+1}w - c_a = 0, \qquad \text{a=1,...,n-1} & (2.4a)\\
\sum_{a=1}^{n}(c_a - e_a) = 0 & (2.4b)\\
\sum_{a=1}^{n} w^{\sigma(a-1)}(c_a - e_a) = 0 & (2.4c)
\end{cases}
$$

Решения этой системы (если убрать $w = 1$) будут долгосрочными равновесиями модели.

Заметим, что скорость нахождения корней зависит от того, сколько у многочлена ненулевых коэффициентов. Поэтому нужно искать наиболее замкнутую форму данного многочлена из всех возможных. В данном случае, многочлен выражен как сумма, количество членов в которой зависит от числа периодов. Так получилось, потому что e_a могут быть любыми, из-за чего количество параметров системы линейно зависит от количества периодов.

3 Алгоритм нахождения решения

В данной модели, как и во всех рассмотренных в данной работе, задача нахождения решения полиномиальной версии уравнений сводится к поиску корней одного многочлена. Рассмотрим, как это работает в данном случае. Использовав $2.4a$, получаем уравнения для потребления в каждом периоде:

$$
c_a = c_n w^{n-a} \tag{3.1}
$$

Подставив 3.1 в $2.4b$, выразим c_n через e_a:

$$
\sum_{a=1}^{n}(c_n w^{n-a} - e_a) = 0
$$

Преобразовав данное уравнение используя формулу суммы геометрической прогрессии и умножив на $1 - w$, получаем:

$$
c_n(1 - w^n) = (\sum_{a=1}^{n} e_a)(1 - w) \tag{3.2}
$$

Теперь можно подставить 3.1 и 3.2 в $2.4c$:

$$
\sum_{a=1}^{n} w^{\sigma(a-1)}((\sum_{a=1}^{n} e_a)(1 - w)w^{n-a} - e_a) = 0
$$

Использовав преобразования, аналогичные 3.2, можем привести уравнение к виду

$$
w^{\sigma-1}(1 - w)(1 - w^{(\sigma-1)n})(\sum_{a=1}^{n} e_a) - \sum_{a=1}^{n} w^{a\sigma}(1 - w^n)(1 - w^{\sigma-1})e_a = 0 \tag{3.3}
$$

Решения этого многочлена можно продолжить до решения всей системы, а именно, используя промежуточные уравнения 3.2 и 3.1. Действительно, зная корни 3.3, можно подставить их в 3.2 и получить значение c_n, а потом подставить его в 3.1. Таким образом, сведя систему к одному многочлену, мы сохранили информацию о всей системе через промежуточные шаги.

Итоговый алгоритм выгдядит следующим образом:

1.Свести задачу к системе полиномиальных уравнений, добавив, если потребуется, вспомогательные переменные.

2.Преобразовать систему к одному многочлену от одной переменной.

3.Найти вещественные корни этого многочлена и отсеять те, которые не имеют экономического смысла (например те, в которых есть отрицательное потребление).

4.Используя промежуточные вычисления из шага 2, восстановить оставшиеся переменные.

4 Нахождение корней многочлена

Задача состоит в том, чтобы находить вещественные решения многочлена. При этом, желательно придумать алгоритм, который будет зависеть от количества ненулевых коэффициентов максимум линейно.

Данный алгоритм основывается на статье Carvalho (2017), модифицируя его для решения конкретной задачи. Основная идея его работы состоит в том, что вещественные корни можно считать рекурсивно, используя знание о корнях производной. А именно, если есть многочлен $f(x)$, то между корнями производной он монотонно убывает или возрастает. Тогда, если на таком участке есть корень, то его можно быстро найти, используя, например, двоичный поиск или метод Ньютона. Таким образом, чтобы посчитать корни многочлена, нужно сначала посчитать все его производные до момента, пока степень производной не будет равна 1. Тогда можно легко найти корень, а, значит, можно продолжить по рекурсии искать корни производных большей степени.

Этот алгоритм имеет несколько недостатков, главный из которых, большое количество итераций рекурсии. Если степень многочлена 1000, он будет искать корни 1000 многочленов. В нашем случае большинство коэффициентов-нули. Тогда, если использовать стандартную реализацию мнгочленов, как массив из коэффициентов, то в памяти будет храниться много несодержательных нулей. Вместо этого можно использовать реализацию многочлена, как словаря, где ключ k-целое число, соответсвующее степени, а значение является коэффициентом при x^k.

Если во время работы алгоритма нужно будет посчитать значение многочлена, например, в точке 10, то компьютеру придется работать с числами порядка 10^{1000}. Более того, если много раз брать производную от такого многочлена, у последнего полинома будут коэффициенты порядка $1000!$, что делает вычисления на компьютере ещё дольше.

Мы предлагаем модификацию этого алгоритма, которая избавляется от этих проблем. Во-первых, можно использовать тот факт, что у многочлена большинство коэффициентов-нули. В частности, у большинства производных свободный коэффициент 0. Найти корни такого многочлена проще, потому что среди них есть нулевой корень.

Допустим, при очередном взятии производной у нас получился многочлен $f(x)$ с нулевым свободным коэффициентом. Тогда вместо его корней можно искать корни многочлена $\frac{f(x)}{x^k}$, где k-кратность нуля У него ненулевой свободный коэффициент, что исключает ненужные итерации. После этого можно добавить нулевой корень и мы получим искомые корни.

Во-вторых, для двоичного поиска не столько важно само значение в точке, сколько его знак. Поэтому можно находить корни многочлена на участке монотонности зная только положительно значение многочлена в точке или отрицательно. Это можно использовать следующим образом: пусть нужно посчитать значение многочлена $f(x)$ в точке $|a|> 1$. Вместо этого можно посчитать значения рациональной функции $\frac{f(x)}{x^{\deg(f)}}$. Заметим, что проблемы с очень большими значениями не возникает с числами, которые меньше единицы по модулю.

В-третьих, чтобы найти корни многочлена, можно умножить его на любую константу и при этом решения не изменятся. Таким образом можно избежать проблемы чрезмерно высоких коэффициентов, сохраняя на каждом шаге старший коэффициент равным единице.

Применив все вышеуказанные улучшения алгоритма на практике, мы получим алгоритм, скорости которого достаточно для наших целей.

5 Расширенная модель с экзогенным трудом

Для начала рассмотрим более простую модель с экзогенным трудом. Данная модель была рассмотрена в работе Basiri et al. (2022).

В модели дискретное время, которое течёт от $-\infty$ до ∞. В модели участвует одна фирма, производство товаров которой подчиняется формуле Кобба-Дугласа

$$Y_t = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} + (1-\delta) K_t$$

где Y_t обозначает выпуск фирмы при нормализации цен, а K_t и L_t обозначают капитал и труд. Доля капитала это α, аммортизация δ. Тогда условия максимизации прибыли принимают вид

$$\alpha K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} = r_t + \delta$$

и

$$(1-\alpha) K_t^{\alpha} L_t^{-\alpha} = w_t$$

где r_t и w_t обозначают процентную ставку и заработную плату соответсвенно.

Также в модели есть домохозяйства, каждое из которых живет N периодов. При этом, домохозяйство, которое появилось в период с номером t максимизирует функцию полезности

$$U_t(c) = U(c) = \sum_{i=1}^{N} \beta^i v(c_{t+i-1,i})$$

При условии

$$k_{t+1,i} = (1+r_t)k_{t,i-1} + w_t l_i - c_{t,i}$$

где $c_{t,i}, k_{t,i}$ и $l_{t,i}$ обозначают потребление, накопления и труд домохозяйства на iый период жизни в момент времени t. Мы предполагаем, что домохозяйства не ценят труд и нормализуем

$$\sum_{i=1}^{N} l_i = 1$$

Для нашей задачи важно уметь характеризовать решение системы полиномиальными уравнениями, поэтому будет удобно сфокусироваться на функции полезности

$$v(c) = \begin{cases} -c^{-\gamma} & \gamma > 0 \\ \ln(c) & \gamma = 0 \end{cases}$$

Также надо учесть условие равновесия спроса и предложения для капитала

$$K_t = \sum_{i=1}^{N} k_{t,i}$$

Как и в случае маленькой модели, мы будем исследовать долгосрочные равновесия модели. Мы также предположим, что все параметры модели $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, l_1, \dots, l_N)$ являются рациональными числами. Тогда можно записать систему уравнений, решения которой будут долгосрочными равновесиями модели.

$$\begin{cases} c_i = k_{i-1}(1+r) + wl_i - k_i \quad (i = 1, \dots N) & (5.1a) \\ c_i^{-\gamma-1} = \beta(1+r)c_{i+1}^{-\gamma-1} \quad (i = 2, \dots N) & (5.1b) \\ 1 + r = K^{\alpha-1}\alpha + 1 - \delta & (5.1c) \\ w = (1-\alpha)K^{\alpha} & (5.1d) \\ K = \sum_{i=1}^{N} k_i & (5.1e) \\ k_0 = k_N = 0 & (5.1f) \end{cases}$$

Нам нужна полиномиальная система, поэтому сделаем несколько замен. Во-первых, предположим, что $\alpha = \frac{m}{n}$, где m и n натуральные числа. Во-вторых, введём новую переменную S, такую что $S^n = K$. Это соотношение позволяет записать $K^{\alpha-1} = S^{m-n}$ и, наконец, умножив 5.1c на S^{m-n}, получим полиномиальное уравнение. И в-третьих, введём переменную p, такую что $p^{\gamma+1} = \beta(1+r)$. После этих изменений получим систему, состоящую из многочленов.

$$\begin{cases} c_i = k_{i-1}(1+r) + wl_i - k_i \quad (i = 1, \dots N) & (5.2\text{a}) \\ c_i = pc_{i-1} \quad (i = 2, \dots N) & (5.2\text{b}) \\ p^{\gamma+1} = \beta(1+r) & (5.2\text{c}) \\ K = S^n & (5.2\text{d}) \\ S^{n-m}(r+\delta) = \alpha & (5.2\text{e}) \\ w = (1-\alpha)S^m & (5.2\text{f}) \\ K = \sum_{i=1}^{N} k_i & (5.2\text{g}) \\ k_0 = k_N = 0 & (5.2\text{h}) \end{cases}$$

Для наших целей будет удобно рассмотреть случай, когда труд домохозяйств не меняется от периода к периоду ($l_i = \frac{1}{N}$) Распишем план решения. Из 5.2b выводим, что

$$c_i = c_1 p^{i-1} \tag{5.3}$$

Подставив 5.3 и 5.2g в сумму всех уравнений из 5.2a и применив формулу суммы геометрической прогрессии, получаем

$$\frac{p^N - 1}{p - 1} c_1 = Kr + w = (S^n r + w) \tag{5.4}$$

Теперь можно умножить уравнение на $p - 1$ и получить полином

$$(p^N - 1)c_1 = (p-1)(S^n r + w) \tag{5.5}$$

Теперь рассмотрим взвешенную сумму уравнений из 5.2a. Причем, при уравнениии с номером i стоит вес $(1+r)^{N-i}$. Тогда можно опять использовать 5.3, два раза формулу геометричесой прогрессии и умножить на нужный многочлен, чтобы получить

$$((1+r)p - 1)(p^N - (1+r)^N)c_1 = w((1+r)^N - 1)(p - (1+r))/N \tag{5.6}$$

Теперь можно умножить это уравнение на $N(p^N - 1)$ и использовать 5.5 и получить

$$[N(S^n r + w)(p^N - 1)(p-1)((1+r)p-1)(p^N - (1+r)^N) - w(p-(1+r))((1+r)^N p^N - 1)] = 0 \tag{5.7}$$

Можно также выразить r и w из 5.2e и 5.2f и получить многочлен

$$\begin{aligned} &S^m[N(\delta\alpha\beta - p^\gamma + \beta(1-\delta))(p^N - 1)(p-1)(p^{(\gamma+1)} - \beta)(\beta^N p^N - p^{\gamma N}) \\ &\quad - \alpha(p^\gamma - \beta(1-\delta))(\beta p - p^\gamma)(p^{(\gamma+1)N} - \beta^N)] = 0 \end{aligned} \tag{5.8}$$

S определялось так, что решение $S = 0$ не имеет экономического смысла, поэтому можно искать корни многочлена от одной переменной (p)

$$\begin{aligned} &N(\delta\alpha\beta - p^\gamma + \beta(1-\delta))(p^N - 1)(p-1)(p^{(\gamma+1)} - \beta)(\beta^N p^N - p^{\gamma N}) \\ &\quad - \alpha(p^\gamma - \beta(1-\delta))(\beta p - p^\gamma)(p^{(\gamma+1)N} - \beta^N) = 0 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Применяя алгоритм описанный в третьей главе, можем найти решения.

6 Расширенная модель с эндогенным трудом

Расширим вышеописанную OLG-модель, добавив в неё более естественное условие эндогенности труда. Некоторые уравнения остаются теми же:

$$\begin{cases} \alpha K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} = r_t + \delta & (6.1a) \\ (1-\alpha) K_t^{\alpha} L_t^{-\alpha} = w_t & (6.1b) \\ k_{t+1,i} = (1+r_t) k_{t,i-1} + w_t l_i - c_{t,i} & (6.1c) \\ K_t = \sum_{i=1}^{N} k_{t,i} & (6.1d) \end{cases}$$

Теперь труд эндогенный, поэтому:

$$L = \sum l_{t,i}$$

Замеим, что в модели с экзогенным трудом это условие тоже выполнялось, но не было уравнением, так как l_i не были переменными. Также теперь домохозяйства сами выбирают, сколько они трудятся в каждый период, поэтому в функцию полезности нужно добавить отрицательную полезность от труда.

$$U(c,l) = \sum_{i=1}^{N} \beta^i \left(\frac{c_i^{1-\theta} - 1}{1-\theta} - \nu \frac{l_i^{1+\gamma}}{1+\gamma}\right)$$

Так как мы ищем долгосрочные решения, система принимает вид:

$$\begin{cases} c_i = k_{i-1}(1+r) + w l_i - k_i \quad (i = 1, \dots, N) & (6.2a) \\ \beta(1+r) c_i^{-\theta} = c_{i-1}^{-\theta} \quad (i = 2, \dots, N) & (6.2b) \\ l_i^{-\gamma} = \beta(1+r) l_{i-1}^{-\gamma} \quad (i = 2, \dots, N) & (6.2c) \\ \nu c_i^{\theta} l_i^{\gamma} = w \quad (i = 1, \dots, N) & (6.2d) \\ 1 + r = \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} + 1 - \delta & (6.2e) \\ w = (1-\alpha) K^{\alpha} L^{-\alpha} & (6.2f) \\ K = \sum_{i=1}^{N} k_i & (6.2g) \\ L = \sum_{i=1}^{N} l_i & (6.2h) \\ k_0 = k_N = 0 & (6.2i) \end{cases}$$

Произведём замены:

$$S^n = \frac{K}{L}$$

и

$$p^{\theta\gamma} = \beta(1+r)$$

Тогда система уравнений примет вид:

$$
\begin{cases}
c_i = k_{i-1}(1+r) + wl_i - k_i \quad (i = 1, \dots, N) \\
c_i = p^{\gamma} c_{i-1} \quad (i = 2, \dots, N) \\
p^{\theta} l_i = l_{i-1} \quad (i = 2, \dots N) \\
p^{\theta\gamma} = \beta(1+r) \\
K = S^n L \\
\nu c_i^{\theta} l_i^{\gamma} = w \\
S^{n-m}(r+\delta) = \alpha \\
w = (1-\alpha) S^m \\
K = \sum k_a \\
L = \sum l_a \\
k_0 = k_N = 0
\end{cases} \tag{6.3}
$$

Можем упрощать систему так же, как в предыдущей главе:
Для начала избавимся от потребления так же, как и в 5.5

$$
\frac{p^{\gamma N} - 1}{p^{\gamma} - 1} c_1 = Kr + wL = L(S^n r + w) \tag{6.4}
$$

$$
(p^{\gamma N} - 1) c_1 = (p^{\gamma} - 1) L (S^n r + w) \tag{6.5}
$$

Можно аналогичным способом избавиться от труда:

$$
(p^{\theta} - 1) L = (p^{\theta N} - 1) l_N \tag{6.6}
$$

Теперь можно связать труд и оставшееся потребление в одном уравнении, полученном аналогично 5.6

$$
((1+r)p^{\theta} - 1)(p^{\gamma N} - (1+r)^N) c_1 = w l_N ((1+r)^N p^{\theta N} - 1)(p^{\gamma} - (1+r)) \tag{6.7}
$$

Соединим три предыдущих уравнения в одно и получим:

$$
\begin{split}
L[(S^n r + w)(p^{\theta N} - 1)(p^{\gamma} - 1)((1+r)p^{\theta} - 1)(p^{\gamma N} - (1+r)^N) - \\
w(p^{\gamma N} - 1)(p^{\theta} - 1)(p^{\gamma} - (1+r))((1+r)^N p^{\theta N} - 1)] = 0
\end{split} \tag{6.8}
$$

Теперь аналогично последнему шагу из предыдущей главы, выразим r и w:

$$
\begin{split}
LS^m[(p^{\theta\gamma} - \beta(1-\delta) - \delta\alpha\beta)(p^{\theta N} - 1)(p^{\gamma} - 1)(p^{\theta(\gamma+1)} - \beta)(\beta^N p^{\gamma N} - p^{\theta\gamma N}) - \\
(1-\alpha)(p^{\theta\gamma} - \beta(1-\delta))(p^{\gamma N} - 1)(p^{\theta} - 1)(\beta p^{\gamma} - p^{\theta\gamma})(p^{\theta(\gamma+1)N} - \beta^N)] = 0
\end{split} \tag{6.9}
$$

Получили искомый многочлен от одной переменной.

7 Примеры

Мы имплементировали алгоритм в Python 3.10.9, ниже предоставлены примеры работы алгоритма.

7.1 Простая модель

Для начала приведём пример нахождения множественного равновесия в простой модели.

N	σ	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
5	5	0.09693	0.88628	0.7565	0.38374	0.31883

Таблица 1: Параметры простой модели

Найдём равновесия в модели с параметрами, указанными в таблице 1. Подставив эти параметры в формулу для многочлена от одной переменной, получим 7.1

$$\begin{aligned}
&-0.3188329x^{29} + 2.761111x^{25} - 2.507194x^{24}\\
&\quad + 0.06491200000000003x^{20} - 0.37276x^{19} + 0.37276x^{15} -\\
&\quad -0.129776x^{14} + 0.129776x^{10} + 0.789343x^{9} - 3.231625x^{5} + 2.539216x^{4} - 0.096934
\end{aligned} \tag{7.1}$$

Используя новый алгоритм, можем найти все вещественные корни многочлена выше. Мы можем попробовать продолжить этот корень до решения всей системы, однако при этом могут возникнуть проблемы. Во-первых, при использовании алгоритма мы иногда умножали многочлены из нашей системы на другие полиномы. Корни этих полиномов появляются при решении, но мы не должны их учитывать. Во-вторых, отрицательные решения не имеют экономического смысла, поэтому мы про них тоже забываем. В-третьих, в процессе вычисления полного решения могут появиться отрицательные значения потребления, труда и других показателей. Эти случаи нам тоже не подходят. Здесь и далее под отсеиванием будем понимать отбор корней по вышеописанным критериям. Отсеяв ненужные, останутся три решения:

w	q	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	U
0.65238	0.11816	0.17439	0.26731	0.40975	0.62807	0.96274	-330.03541
0.88619	0.54655	0.37806	0.42661	0.48140	0.54322	0.61298	-29.082065
1.09631	1.58367	0.58214	0.53100	0.48435	0.44180	0.40298	-25.90597

Таблица 2: Долгосрочные равновесия

В данной таблице U обозначает сумму полезностей во всех периодах. Таким образом, видно, что алгоритм, в том числе, может находить множественные решения. Так в двух равновесиях наблюдается дефляция (например, в первом решении цены уменьшаются в 10 раз за период). В этих моделях потребление увеличивается со временем. В единственном примере с коэффициентом $q > 1$ инфляция между периодами превышает 50 процентов. В этом равновесии потребление уменьшается.

Единственное оптимальное равновесие достигается только в третьем случае при положительной ставке процента. При этом первое равновесие самое неоптимальное и его следует избегать.

7.2 Модель с экзогенным трудом

Теперь посмотрим на пример нахождения долгосрочного равновесия в модели с экзогенным трудом. Сгенерируем случайные параметры:

N	σ	β	δ	α	γ
70	4	0.9780	0.0560	0.5348	7

Таблица 3: Параметры модели с эндогенным трудом

В таблице 3 показаны параметры модели, у которой мы будем искать равновесия. Используя алгоритм, находим многочлен от одной переменной:

$$\begin{aligned}
&-0.005999586708825199x^{631} + 1x^{577} - 0.9933554817275747x^{576}\\
&\quad - 1.9370923749882019x^{569} + 1.9244594692916281x^{568}\\
&\quad + 0.9376348296629071x^{561} - 0.931635242954082x^{560}\\
&\quad - 0.2115421881527618x^{87} + 0.21294778408733164x^{86}\\
&\quad + 0.40702726232947406x^{79} - 0.40969965484325477x^{78}\\
&\quad - 0.19581099215433925x^{71} + 0.19708015785473637x^{70}\\
&\quad - 0.001405595934569846x^{16} + 0.0013747486647801611x^{9}\\
&\quad + 0.0012976438490005303x^{8} - 0.0012691657003971093
\end{aligned} \tag{7.2}$$

Заметим, что этот многочлен имеет степень 631; для стандартного алгоритма поиска корней эта задача заняла бы много времени. Но у него всего 17 ненулевых коэффициентов, что сильно упрощает поиск при использовании нового алгоритма. Теперь можно найти вещественные корни и отсеять не имеющие экономического смысла. Остаётся одно решение с $p = 1.0196$ и $r = 0.1939$, результаты можно найти во вложении в таблице 5.

Из результатов видно, что за время жизни агента его потребление увеличивается в 4.5 раза. График капиталла имеет форму перевёрнутой буквы U. При этом пик накоплений достигается в период с номером 58 и принимает значение в 2.5 раза больше, чем пиковое потребление.

7.3 Модель с эндогенным трудом

Теперь посмотрим на пример нахождения долгосрочного равновесия в модели с эндогенным трудом. Сгенерируем случайные параметры (таблица 4).

Параметры модели							
N	σ	β	δ	α	γ	θ	ν
70	5	0.9827	0.0813	0.4	3	4	9651

Таблица 4: Параметры модели с эндогенным трудом

Используя алгоритм, находим многочлен от одной переменной (уравнение 7.3).

$$\begin{aligned}
&0.6x^{1358} - 0.6x^{1354} - 0.5895953281731733x^{1349} \\
&\quad - 0.5416398185960283x^{1346} + 0.5895953281731733x^{1345} \\
&\quad + 0.5416398185960283x^{1342} + 0.5322471776613056x^{1337} \\
&\quad - 0.5322471776613056x^{1333} - 1x^{1151} + 0.4x^{1148} + 0.6x^{1144} \\
&\quad + 1.5242986988846505x^{1139} - 0.39306355211544897x^{1136} \\
&\quad + 0.39306355211544897x^{1135} - 1.5242986988846505x^{1132} \\
&\quad - 0.5322471776613056x^{1127} - 0.38624739000403563x^{1123} \\
&\quad + 0.9184945676653412x^{1120} + 1x^{871} - 1x^{868} \\
&\quad - 0.9347033707114772x^{859} + 0.9347033707114772x^{856} \\
&\quad - 0.9826588802886222x^{855} + 0.9826588802886222x^{852} \\
&\quad + 0.9184945676653412x^{843} - 0.9184945676653412x^{840} \\
&\quad + 0.2938967785528849x^{521} - 0.2938967785528849x^{518} \\
&\quad - 0.2747063095546261x^{509} + 0.2747063095546261x^{506} \\
&\quad - 0.288800279333211x^{505} + 0.288800279333211x^{502} \\
&\quad + 0.2699425945551685x^{493} - 0.2699425945551685x^{490} \\
&\quad - 0.2938967785528849x^{241} + 0.11755871142115396x^{238} \\
&\quad + 0.17633806713173092x^{234} + 0.4479864771545527x^{229} \\
&\quad - 0.11552011173328444x^{226} + 0.11552011173328441x^{225} \\
&\quad - 0.44798647715455264x^{222} - 0.15642573090852271x^{217} \\
&\quad - 0.11351686364664579x^{213} + 0.2699425945551685x^{210} \\
&\quad + 0.17633806713173092x^{28} - 0.17633806713173092x^{24} \\
&\quad - 0.1732801675999266x^{19} - 0.15918619782134166x^{16} \\
&\quad + 0.1732801675999266x^{15} + 0.15918619782134166x^{12} \\
&\quad + 0.15642573090852271x^{7} - 0.15642573090852271x^{3}
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Этот многочлен имеет степень 1358; применение стандартных методов к нему бесполезно, зато наш алгоритм справляется за доли секунды.

Теперь можно найти вещественные корни и отсеять не имеющие экономического смысла; получается одно решение, которое можно найти во вложении в таблице 6.

Проанализируем полученные результаты: Во-первых, получилась реалистичная процентная ставка 4.2%. Во-вторых за время жизни агента, потребление увеличилось на 50%, а трудиться он стал на меньше на 40%. В-третьих, кривая капиталла принимает вид параболы ветвями вниз с пиком в 43 периоде и со значением, которое в 5 раз больше пикового потребления.

8 Время работы алгоритма и эксперименты Монте-Карло

8.1 Простая модель

Для самой простой модели результаты зависят от параметров N и σ.

В таблице 7*a* содержится информация о том, сколько времени потребовалось для решения 1000 моделей с параметрами e_i, сгенерированными равномерно случайно от 0 до 1. Как видно из таблицы, результаты зависят от сочетания N и σ, а также могут зависеть от чётности. Но тем не менее, этого достаточно, чтобы за сравнительно небольшое время можно было провести большое количество тестов.

Заметим, что наш алгоритм не предназначен для работы с маленькими моделями, поэтому классические методы могут работать быстрее. Однако, это не меняет того факта, что разница в этих моделях менее заметна, поэтому алгоритм можно применять в том числе и к маленьким моделям.

8.2 Модель с экзогенным трудом

Для модели с экзогенным трудом были проделаны тесты на 100 симуляциях. При этом параметры α, β и δ генерировались случайно из равномерного распределения на отрезке от 0 до 1. γ была случайным натуральным числом от 5 до 20, а σ - от 3 до 10.

В таблице 7*b* в графе t_{exo} содержится информация о том, сколько времени потребовалось для решения 100 моделей.

В работе Basiri et al. (2022) описывается алгоритм, который находит равновесия в модели с 70 периодами. Алгоритму требуется 70 секунд, чтобы просто найти вещественные корни многочлена в одной модели и ещё больше времени, чтобы найти полное решение. В то же время наша модель за 2 секунды находит решения 100 моделей и время не зависит от количества периодов. Можно сделать вывод, что новый алгоритм работает значительно эффективнее, чем существовавшие до этого решения.

8.3 Модель с эндогенным трудом

Теперь посмотрим на результаты алгоритма на задаче с эндогенным трудом.

Параметры σ, α, β, δ и γ генерировались случайно таким же образом, как и в модели с экзогенным трудом. θ генерировалась так же, как γ, а ν с вероятностью $\frac{1}{2}$ была равна x или $\frac{1}{x}$, где x-случайная величина, взятая из равномерного распределения на отрезке $[0, 1]$.

В таблице 7*b* в столбике t_{endo} содержится информация о том, сколько времени нужно алгоритму, чтобы посчитать равновесие в 100 моделях.

Заметим, что данная задача решается почти на порядок медленнее, потому что многочлен, корни которого нужно найти, имеет больше ненулевых коэффициентов. Отметим ещё один плюс нашего алгоритма: он не зависит от количества периодов, так как вид многочлена не зависит от N.

8.4 Исследование моделей на наличие множественности равновесий

Также были произведены тесты на наличие множественности равновесий. Для простой модели уже существовали результаты, описывающие вероятность множественного равновесия, которые были описаны в работе Kubler and Schmedders (2010). С помощью нового алгоритма были реплицированы результаты из этой работы. Также были произведены тесты на двух моделях с трудом. Параметры α, β, γ, δ случайно сэмплировались таким же способом, как и в модели с экзогенным трудом. Параметр θ сэмплировался так же, как и γ. А параметр ν генерировался так: сначала мы получали случайное число x из равномерного распределения из отрезко от 0 до 1, а потом с вероятностью $\frac{1}{2}$ ν принимало значение x или $\frac{1}{x}$. Для обеих моделей было произведено более 50000 итераций, но множественность не была обнаружена, что даёт надежду на то, что в реалистично откалиброванных моделях множественность равновесий не наблюдается.

9 Заключение

В данной работе мы описали новый алгоритм нахождения долгосрочных равновесий в OLG-моделях. В процессе был придуман способ быстрого нахождения вещественных корней многочлена. Новый алгоритм дал существенный прирост скорости работы, который позволил исследовать экономические модели методом Монте-Карло. С помощью нового алгоритма были реплицированы результаты, относящиеся к существованию примеров множественности в моделях с маленьким количеством периодов и без труда. В частности, было замечено, что лишь один из этих результатов является эффективным решением. Также были исследованы модели с экзо- и эндогенным трудом на предмет существования примеров множественности. После большого количества итераций, таковых не было обнаружено. Это может означать, что в реалистично откалиброванных моделях множественность стабильных равновесий маловероятна.

10 Вложения

$S = 1.0388$	$w = 1.1156$	$c_{23} = 0.0219$	$k_{23} = 0.0461$	$c_{47} = 0.0349$	$k_{47} = 0.1181$
$K = 5.1326$	$k_0 = 0$	$c_{24} = 0.0224$	$k_{24} = 0.0486$	$c_{48} = 0.0356$	$k_{48} = 0.1214$
$c_1 = 0.0143$	$k_1 = 0.0016$	$c_{25} = 0.0228$	$k_{25} = 0.0512$	$c_{49} = 0.0363$	$k_{49} = 0.1245$
$c_2 = 0.0146$	$k_2 = 0.0032$	$c_{26} = 0.0233$	$k_{26} = 0.0537$	$c_{50} = 0.037$	$k_{50} = 0.1275$
$c_3 = 0.0149$	$k_3 = 0.0049$	$c_{27} = 0.0237$	$k_{27} = 0.0564$	$c_{51} = 0.0378$	$k_{51} = 0.1305$
$c_4 = 0.0152$	$k_4 = 0.0066$	$c_{28} = 0.0242$	$k_{28} = 0.0591$	$c_{52} = 0.0385$	$k_{52} = 0.1332$
$c_5 = 0.0155$	$k_5 = 0.0084$	$c_{29} = 0.0247$	$k_{29} = 0.0618$	$c_{53} = 0.0392$	$k_{53} = 0.1357$
$c_6 = 0.0158$	$k_6 = 0.0101$	$c_{30} = 0.0251$	$k_{30} = 0.0646$	$c_{54} = 0.04$	$k_{54} = 0.1379$
$c_7 = 0.0161$	$k_7 = 0.0119$	$c_{31} = 0.0256$	$k_{31} = 0.0674$	$c_{55} = 0.0408$	$k_{55} = 0.1398$
$c_8 = 0.0164$	$k_8 = 0.0138$	$c_{32} = 0.0261$	$k_{32} = 0.0703$	$c_{56} = 0.0416$	$k_{56} = 0.1413$
$c_9 = 0.0167$	$k_9 = 0.0157$	$c_{33} = 0.0266$	$k_{33} = 0.0733$	$c_{57} = 0.0424$	$k_{57} = 0.1422$
$c_{10} = 0.0171$	$k_{10} = 0.0176$	$c_{34} = 0.0272$	$k_{34} = 0.0763$	$c_{58} = 0.0432$	$k_{58} = 0.1425$
$c_{11} = 0.0174$	$k_{11} = 0.0195$	$c_{35} = 0.0277$	$k_{35} = 0.0793$	$c_{59} = 0.0441$	$k_{59} = 0.1419$
$c_{12} = 0.0177$	$k_{12} = 0.0215$	$c_{36} = 0.0282$	$k_{36} = 0.0824$	$c_{60} = 0.0449$	$k_{60} = 0.1404$
$c_{13} = 0.0181$	$k_{13} = 0.0235$	$c_{37} = 0.0288$	$k_{37} = 0.0855$	$c_{61} = 0.0458$	$k_{61} = 0.1378$
$c_{14} = 0.0184$	$k_{14} = 0.0256$	$c_{38} = 0.0293$	$k_{38} = 0.0886$	$c_{62} = 0.0467$	$k_{62} = 0.1337$
$c_{15} = 0.0188$	$k_{15} = 0.0277$	$c_{39} = 0.0299$	$k_{39} = 0.0918$	$c_{63} = 0.0476$	$k_{63} = 0.1279$
$c_{16} = 0.0192$	$k_{16} = 0.0299$	$c_{40} = 0.0305$	$k_{40} = 0.0951$	$c_{64} = 0.0486$	$k_{64} = 0.1201$
$c_{17} = 0.0195$	$k_{17} = 0.0321$	$c_{41} = 0.0311$	$k_{41} = 0.0983$	$c_{65} = 0.0495$	$k_{65} = 0.1098$
$c_{18} = 0.0199$	$k_{18} = 0.0343$	$c_{42} = 0.0317$	$k_{42} = 0.1016$	$c_{66} = 0.0505$	$k_{66} = 0.0965$
$c_{19} = 0.0203$	$k_{19} = 0.0366$	$c_{43} = 0.0323$	$k_{43} = 0.1049$	$c_{67} = 0.0515$	$k_{67} = 0.0797$
$c_{20} = 0.0207$	$k_{20} = 0.0389$	$c_{44} = 0.033$	$k_{44} = 0.1083$	$c_{68} = 0.0525$	$k_{68} = 0.0586$
$c_{21} = 0.0211$	$k_{21} = 0.0412$	$c_{45} = 0.0336$	$k_{45} = 0.1116$	$c_{69} = 0.0535$	$k_{69} = 0.0323$
$c_{22} = 0.0215$	$k_{22} = 0.0436$	$c_{46} = 0.0343$	$k_{46} = 0.1149$	$c_{70} = 0.0546$	$k_{70} = 0$

Таблица 5: Равновесие в модели с экзогенным трудом

$p = 1.002$	$r = 0.0422$	$S = 1.2163$	$w = 1.3131$	$L = 56.2174$	$K = 398.3248$
$c_1 = 1.0464$	$l_1 = 1.0431$	$k_1 = 0.3233$	$c_{36} = 1.2893$	$l_{36} = 0.7897$	$k_{36} = 8.3663$
$c_2 = 1.0527$	$l_2 = 1.0348$	$k_2 = 0.6431$	$c_{37} = 1.297$	$l_{37} = 0.7834$	$k_{37} = 8.4512$
$c_3 = 1.0589$	$l_3 = 1.0266$	$k_3 = 0.9593$	$c_{38} = 1.3047$	$l_{38} = 0.7772$	$k_{38} = 8.5238$
$c_4 = 1.0653$	$l_4 = 1.0185$	$k_4 = 1.2719$	$c_{39} = 1.3125$	$l_{39} = 0.7711$	$k_{39} = 8.5836$
$c_5 = 1.0717$	$l_5 = 1.0104$	$k_5 = 1.5807$	$c_{40} = 1.3204$	$l_{40} = 0.765$	$k_{40} = 8.63$
$c_6 = 1.0781$	$l_6 = 1.0024$	$k_6 = 1.8857$	$c_{41} = 1.3283$	$l_{41} = 0.7589$	$k_{41} = 8.6626$
$c_7 = 1.0845$	$l_7 = 0.9945$	$k_7 = 2.1866$	$c_{42} = 1.3362$	$l_{42} = 0.7529$	$k_{42} = 8.6807$
$c_8 = 1.091$	$l_8 = 0.9866$	$k_8 = 2.4834$	$c_{43} = 1.3442$	$l_{43} = 0.7469$	$k_{43} = 8.6837$
$c_9 = 1.0975$	$l_9 = 0.9788$	$k_9 = 2.776$	$c_{44} = 1.3522$	$l_{44} = 0.741$	$k_{44} = 8.6711$
$c_{10} = 1.1041$	$l_{10} = 0.971$	$k_{10} = 3.0642$	$c_{45} = 1.3603$	$l_{45} = 0.7352$	$k_{45} = 8.6421$
$c_{11} = 1.1107$	$l_{11} = 0.9633$	$k_{11} = 3.3478$	$c_{46} = 1.3685$	$l_{46} = 0.7293$	$k_{46} = 8.5961$
$c_{12} = 1.1173$	$l_{12} = 0.9557$	$k_{12} = 3.6267$	$c_{47} = 1.3767$	$l_{47} = 0.7236$	$k_{47} = 8.5324$
$c_{13} = 1.124$	$l_{13} = 0.9482$	$k_{13} = 3.9008$	$c_{48} = 1.3849$	$l_{48} = 0.7178$	$k_{48} = 8.4503$
$c_{14} = 1.1307$	$l_{14} = 0.9406$	$k_{14} = 4.1699$	$c_{49} = 1.3932$	$l_{49} = 0.7121$	$k_{49} = 8.3489$
$c_{15} = 1.1375$	$l_{15} = 0.9332$	$k_{15} = 4.4338$	$c_{50} = 1.4015$	$l_{50} = 0.7065$	$k_{50} = 8.2276$
$c_{16} = 1.1443$	$l_{16} = 0.9258$	$k_{16} = 4.6923$	$c_{51} = 1.4099$	$l_{51} = 0.7009$	$k_{51} = 8.0854$
$c_{17} = 1.1511$	$l_{17} = 0.9185$	$k_{17} = 4.9453$	$c_{52} = 1.4183$	$l_{52} = 0.6954$	$k_{52} = 7.9214$
$c_{18} = 1.158$	$l_{18} = 0.9112$	$k_{18} = 5.1925$	$c_{53} = 1.4268$	$l_{53} = 0.6898$	$k_{53} = 7.7348$
$c_{19} = 1.165$	$l_{19} = 0.904$	$k_{19} = 5.4338$	$c_{54} = 1.4353$	$l_{54} = 0.6844$	$k_{54} = 7.5247$
$c_{20} = 1.1719$	$l_{20} = 0.8968$	$k_{20} = 5.6688$	$c_{55} = 1.4439$	$l_{55} = 0.679$	$k_{55} = 7.2899$
$c_{21} = 1.1789$	$l_{21} = 0.8897$	$k_{21} = 5.8975$	$c_{56} = 1.4526$	$l_{56} = 0.6736$	$k_{56} = 7.0296$
$c_{22} = 1.186$	$l_{22} = 0.8827$	$k_{22} = 6.1195$	$c_{57} = 1.4612$	$l_{57} = 0.6683$	$k_{57} = 6.7426$
$c_{23} = 1.1931$	$l_{23} = 0.8757$	$k_{23} = 6.3346$	$c_{58} = 1.47$	$l_{58} = 0.663$	$k_{58} = 6.4277$
$c_{24} = 1.2002$	$l_{24} = 0.8687$	$k_{24} = 6.5425$	$c_{59} = 1.4788$	$l_{59} = 0.6577$	$k_{59} = 6.0839$
$c_{25} = 1.2074$	$l_{25} = 0.8619$	$k_{25} = 6.743$	$c_{60} = 1.4876$	$l_{60} = 0.6525$	$k_{60} = 5.7099$
$c_{26} = 1.2146$	$l_{26} = 0.855$	$k_{26} = 6.9358$	$c_{61} = 1.4965$	$l_{61} = 0.6473$	$k_{61} = 5.3045$
$c_{27} = 1.2219$	$l_{27} = 0.8483$	$k_{27} = 7.1206$	$c_{62} = 1.5055$	$l_{62} = 0.6422$	$k_{62} = 4.8662$
$c_{28} = 1.2292$	$l_{28} = 0.8416$	$k_{28} = 7.297$	$c_{63} = 1.5145$	$l_{63} = 0.6371$	$k_{63} = 4.3937$
$c_{29} = 1.2365$	$l_{29} = 0.8349$	$k_{29} = 7.4648$	$c_{64} = 1.5235$	$l_{64} = 0.6321$	$k_{64} = 3.8856$
$c_{30} = 1.2439$	$l_{30} = 0.8283$	$k_{30} = 7.6235$	$c_{65} = 1.5326$	$l_{65} = 0.6271$	$k_{65} = 3.3404$
$c_{31} = 1.2514$	$l_{31} = 0.8217$	$k_{31} = 7.773$	$c_{66} = 1.5418$	$l_{66} = 0.6221$	$k_{66} = 2.7565$
$c_{32} = 1.2589$	$l_{32} = 0.8152$	$k_{32} = 7.9127$	$c_{67} = 1.551$	$l_{67} = 0.6172$	$k_{67} = 2.1323$
$c_{33} = 1.2664$	$l_{33} = 0.8088$	$k_{33} = 8.0423$	$c_{68} = 1.5603$	$l_{68} = 0.6123$	$k_{68} = 1.4659$
$c_{34} = 1.274$	$l_{34} = 0.8023$	$k_{34} = 8.1613$	$c_{69} = 1.5696$	$l_{69} = 0.6074$	$k_{69} = 0.7558$
$c_{35} = 1.2816$	$l_{35} = 0.796$	$k_{35} = 8.2695$	$c_{70} = 1.579$	$l_{70} = 0.6026$	$k_{70} = 0$

Таблица 6: Долгорочное равновесие в модели с эндогенным трудом

N	σ	t
3	3	1.886
3	4	2.101
3	5	3.300
3	6	3.323
3	7	3.751
4	3	4.943
4	4	2.367
4	5	5.454
4	6	7.020
4	7	5.733
5	3	6.258
5	4	4.522
5	5	4.029
5	6	4.447
5	7	12.910
3	10	2.555
3	15	4.032
3	20	2.638

(a) Простая модель, n=1000

N	t_{exo}	t_{endo}
5	2.040	13.720
10	1.680	13.151
15	2.037	13.409
20	1.659	13.127
25	2.144	14.543
30	1.822	13.968
35	2.130	14.533
40	1.822	13.632
45	2.106	14.737
50	1.768	13.802
55	2.127	14.270
60	1.797	13.922
65	2.121	14.383
70	1.775	13.334

(b) Модели с экзо- и эндогенным трудом, n=100

Таблица 7: Время (в секундах), потраченное на n итераций в каждой модели

Список литературы

Зубарев А.,Нестерова К. Фискальная консолидация в условиях пандемии // Вопросы экономики.- 2022.- №.7.- С.5-26.

Луговой О.,Полбин А. О распределении бремени сокращения выбросов парниковых газов между поколениями // Журнал новой экономической ассоциации.- 2016.- №3.

Нестерова К. Миграция, квалификация работников и экономический рост в регионах мира: анализ на модели с перекрывающимися поколениями // Экономическая политика.- 2021.- Т. 16.- №5.- С.8-39.

Норкина О.,Пекарский С. Нерыночное размещение долга как финансовая репрессия // Журнал Новой экономической ассоциации.- 2015.- №.28.- С.31-55.

Altig A.,Auerbach A.,Kotlikoff L. Simulating fundamental tax reform in the United States // American Economic Review.- 2001.- Vol.91(3).- pp.574-595.

Auerbach A.,Kotlikoff L. Evaluating fiscal policy with a dynamic simulation model // The American Economic Review.- 1987.- Vol.77(2).- pp.49-55.

Auerbach A.,Kotlikoff L. National savings, economic welfare, and the structure of taxation // Behavioral simulation methods in tax policy analysis.- 1983.- pp.459-498.

Basak S., Cass D. ,Manuel J., Pavlova A. Multiplicity in General Financial Equilibrium with Portfolio Constraints // Institute for Economic Research (PIER) Working Paper Series // 2006.

Basiri A.,Riahi M,,Kubler F.,Rahmany S. Efficient Calculation of All Steady States in Large-Scale Overlapping Generations Models // SSRN Electronic Journal.- 2022.

Becker T.,Weispfenning V. Gröbner bases: a computational approach to commutative algebra // Springer Science & Business Media.- 2012.- Vol.141

Bovenberg L.,Heijdra B. Environmental tax policy and intergenerational distribution // Journal of Public Economics.- 1998.- Vol.67.- pp.1-24.

Carvalho O. A simple recursive algorithm to find all real roots of a polynomial // Researchgate.- 2017.

Fried S,,Novan K.,Peterman W. The distributional effects of a carbon tax on current and future generations // Review of Economic Dynamics.- 2018.- Vol.30.- pp.30-46.

Hong H. ,Stein J. Differences of Opinion, Short-Sales Constraints, and Market Crashes // Review of Financial Studies .- 2003.- Vol. 16.- pp.487-525.

Kehoe, T.,Levine D. The economics of indeterminacy in overlapping generations models // Journal of Public Economics.- 1990.- Vol.42.- pp.219-243.

Kotlikoff L.,Kubler F.,Polbin A.,Sachs J.,Scheidegger S. Making carbon taxation a generational win win // International Economic Review.- 2021.- Vol.62(1).- pp.3-46.

Kotlikoff L.,Smetters K.,Walliser J. Mitigating America's demographic dilemma by pre-funding social security // Journal of monetary Economics.- 2007.- Vol.54.- pp.247-266.

Kubler F.,Schmedders K. Tackling multiplicity of equilibria with Gröbner bases // Operations research.- 2010.- Vol.58(4-part2).- pp.1037-1050.

Kubler F.,Schmedders K. Uniqueness of steady states in models with overlapping generations // Journal of the European Economic Association.- 2010.- Vol.8(2-3).- pp.635-644.

Summers L. Capital Taxation and Accumulation in a Life Cycle Growth Model // The American Economic Review.- 1981.- Vol.71.- pp.533-544.